

Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 1
19.11.21

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność ciągu i znajdź granicę, jeżeli jest zbieżny:

$$a_n = \sqrt[n]{n \cdot 2^n + 3^n}$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że $n2^n \leq n3^n$, a w związku z tym

$$\sqrt[n]{3^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{2n3^n}$$

$$3 \leq a_n \leq \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{n} 3.$$

Skrajne ciągi dążą do 3, więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Rozwiąż nierówność

$$\left| |x + 1| - |x - 1| \right| < 1.$$

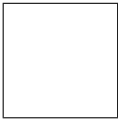
Rozwiązanie: Możemy rozważyć przypadki, $x \leq -1$, $-1 < x < 1$ oraz $x \geq 1$.

Dla $x \leq -1$ mamy $\left| |x + 1| - |x - 1| \right| < 1 \Leftrightarrow | -x - 1 - (-x + 1) | < 1 \Leftrightarrow 2 < 1$. W tym przypadku nie ma więc rozwiązań.

Dla $-1 < x < 1$ mamy $\left| |x + 1| - |x - 1| \right| < 1 \Leftrightarrow |x + 1 - (-x + 1)| < 1 \Leftrightarrow |2x| < 1$. W tym przypadku rozwiązaniami są $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Dla $x \geq 1$ mamy $\left| |x + 1| - |x - 1| \right| < 1 \Leftrightarrow |x + 1 - (x - 1)| < 1 \Leftrightarrow 2 < 1$. Także w tym przypadku nie ma rozwiązań.

Podsumowując wszystkie przypadki, rozwiązaniem są $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



Pierwsza litera nazwiska

3

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz wszystkie pierwiastki

$$\sqrt[3]{\sqrt{3} - \mathbf{i}}.$$

Rozwiązanie: Przedstawiamy $\sqrt{3} - \mathbf{i}$ w postaci trygonometrycznej:

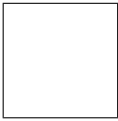
$$\sqrt{3} - \mathbf{i} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} \right) \mathbf{i} \right) = 2 \cdot \left(\cos \frac{11}{6} \pi + \mathbf{i} \sin \frac{11}{6} \pi \right).$$

Następnie wypisujemy pierwiastki:

$$w_0 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{11}{18} \pi + \mathbf{i} \sin \frac{11}{18} \pi \right),$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{23}{18} \pi + \mathbf{i} \sin \frac{23}{18} \pi \right),$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{35}{18} \pi + \mathbf{i} \sin \frac{135}{18} \pi \right).$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź kresy zbioru:

$$A = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}, m < 2n \right\}.$$

Rozwiązanie: Zauważamy, że przy podanych warunkach $0 < \frac{m}{n} < 2$. Mamy więc $\inf A \geq 0$ i $\sup A \leq 2$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i $m = 2n - 1$. Wtedy $\frac{m}{n} \in A$. Ale $\frac{m}{n} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$ leży dowolnie blisko 2 (n może być dowolnie duże). Tak więc

$$\sup A = 2.$$

Z drugiej strony weźmy $m = 1$ i $n > 2$. Znowu $\frac{m}{n} \in A$, ale $\frac{m}{n} = \frac{1}{n}$ i liczba ta leży dowolnie blisko 0 (n jest dowolnie duże). Otrzymujemy

$$\inf A = 0.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Ciąg $\{a_n\}$ określony jest rekurencyjnie:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot a_n}.$$

Zbadaj zbieżność ciągu i znajdź granicę, jeżeli jest zbieżny.

Rozwiązanie: Gdyby ciąg był zbieżny (do granicy g), to g musiałaby spełniać

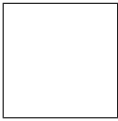
$$g = \sqrt{2g} \quad \Leftrightarrow \quad g^2 = 2g \quad \Leftrightarrow \quad g = 0 \text{ lub } 2.$$

Zauważmy, że $\forall n \quad 0 < a_n < 2$ (dowód indukcyjny). Jeżeli pokażemy, że ciąg jest rosnący lub malejący, to musiałby być zbieżny (monotoniczny i ograniczony). Spróbujmy pokazać, że jest rosnący

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> a_n \\ \sqrt{2 \cdot a_n} &> a_n \\ 2 \cdot a_n &> a_n^2 \\ a_n^2 - 2 \cdot a_n &< 0. \end{aligned}$$

Ta ostatnia nierówność jest spełniona, bo pokazaliśmy, że $0 < a_n < 2$. Ciąg jest więc rosnący, więc zbieżny, a jego granica to 0 lub 2. 0 nie może być granicą, bo wszystkie wyrazy $a_n > a_1 = \sqrt{2}$. Mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$



Pierwsza litera nazwiska

6

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Udowodnij, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$ a ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony od dołu, to ciąg $\{a_n + b_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Rozwiązanie: Mamy pokazać, że $a_n + b_n \rightarrow +\infty$, czyli

$$\forall M \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \quad a_n + b_n > M.$$

Ustalmy zadane M . Ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony od dołu, czyli istnieje liczba N taka, że $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n > N$. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > n_0$ $a_n > M - N$. Dodając nierówności stronami, otrzymujemy to co chcieliśmy: $a_n + b_n > M$.