Pierwsza litera nazwiska

1

**Kolokwium 1**
**19.11.21**

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 1.** Zbadaj zbieżność ciągu i znajdź granicę, jeżeli jest zbieżny:

$$a_n = \sqrt[n]{n \cdot 2^n + 3^n}$$

**Rozwiązanie:** Zauważmy, że $n2^n \leq n3^n$, a w związku z tym

$$\sqrt[n]{3^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{2n3^n}$$
$$3 \leq a_n \leq \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}\,3.$$

Skrajne ciągi dążą do 3, więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3.$$

Pierwsza litera nazwiska



**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 2.** Rozwiąż nierówność

$$\Big||x+1|-|x-1|\Big| < 1.$$

**Rozwiązanie:** Możemy rozważyć przypadki, $x \leq -1$, $-1 < x < 1$ oraz $x \geq 1$.
Dla $x \leq -1$ mamy $\Big||x+1|-|x-1|\Big| < 1 \leftrightarrow |-x-1-(-x+1)| < 1 \leftrightarrow 2 < 1$. W tym przypadku nie ma więc rozwiązań.
Dla $-1 < x < 1$ mamy $\Big||x+1|-|x-1|\Big| < 1 \leftrightarrow |x+1-(-x+1)| < 1 \leftrightarrow |2x| < 1$. W tym przypadku rozwiązaniami są $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Dla $x \geq 1$ mamy $\Big||x+1|-|x-1|\Big| < 1 \leftrightarrow |x+1-(x-1)| < 1 \leftrightarrow 2 < 1$. Także w tym przypadku nie ma rozwiązań.
Podsumowując wszystkie przypadki, rozwiązaniem są $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Pierwsza litera nazwiska



**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 3.** Oblicz wszystkie pierwiastki

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}-\mathbf{i}}.$$

**Rozwiązanie:** Przedstawiamy $\sqrt{3}-\mathbf{i}$ w postaci trygonometrycznej:

$$\sqrt{3}-\mathbf{i} = 2\cdot\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\big(-\tfrac{1}{2}\big)\,\mathbf{i}\big) = 2\cdot\big(\cos\tfrac{11}{6}\pi+\mathbf{i}\sin\tfrac{11}{6}\pi\big).$$

Następnie wypisujemy pierwiastki:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{2}\cdot\big(\cos\tfrac{11}{18}\pi+\mathbf{i}\sin\tfrac{11}{18}\pi\big),\\ w_1 &= \sqrt[3]{2}\cdot\big(\cos\tfrac{23}{18}\pi+\mathbf{i}\sin\tfrac{23}{18}\pi\big),\\ w_2 &= \sqrt[3]{2}\cdot\big(\cos\tfrac{35}{18}\pi+\mathbf{i}\sin\tfrac{135}{18}\pi\big). \end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska



**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 4.** Znajdź kresy zbioru:

$$A = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N},\ m < 2n \right\}.$$

**Rozwiązanie:**Zauważamy, że przy podanych warunkach $0 < \frac{m}{n} < 2$. Mamy więc $\inf A \geq 0$ i $\sup A \leq 2$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i $m = 2n - 1$. Wtedy $\frac{m}{n} \in A$. Ale $\frac{m}{n} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$ leży dowolnie blisko 2 ($n$ może być dowolnie duże). Tak więc

$$\sup A = 2.$$

Z drugiej strony weźmy $m = 1$ i $n > 2$. Znowu $\frac{m}{n} \in A$, ale $\frac{m}{n} = \frac{1}{n}$ i liczba ta leży dowolnie blisko 0 ($n$ jest dowolnie duże). Otrzymujemy

$$\inf A = 0.$$

Pierwsza litera nazwiska



**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 5.** Ciąg $\{a_n\}$ określony jest rekurencyjnie:

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot a_n}.$$

Zbadaj zbieżność ciągu i znajdź granicę, jeżeli jest zbieżny.

**Rozwiązanie:** Gdyby ciąg był zbieżny (do granicy $g$), to $g$ musiałaby spełniać

$$g = \sqrt{2g} \quad \leftrightarrow \quad g^2 = 2g \quad \leftrightarrow \quad g = 0 \text{ lub } 2.$$

Zauważmy, że $\forall n \quad 0 < a_n < 2$ (dowód indukcyjny). Jeżeli pokażemy, że ciąg jest rosnący lub malejący, to musiałby być zbieżny (monotoniczny i ograniczony). Spróbujmy pokazać, że jest rosnącyŁ

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> a_n \\ \sqrt{2 \cdot a_n} &> a_n \\ 2 \cdot a_n &> a_n^2 \\ a_n^2 - 2 \cdot a_n &< 0. \end{aligned}$$

Ta ostatnia nierówność jest spełniona, bo pokazaliśmy, że $0 < a_n < 2$. Ciąg jest więc rosnący, więc zbieżny, a jego granica to 0 lub 2. 0 nie może być granicą, bo wszystkie wyrazy $a_n > a_1 = \sqrt{2}$. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Pierwsza litera nazwiska



**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 6.** Udowodnij, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$ a ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony od dołu, to ciąg $\{a_n + b_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

**Rozwiązanie:** Mamy pokazać, że $a_n + b_n \to +\infty$, czyli

$$\forall M \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \quad a_n + b_n > M.$$

Ustalmy zadane $M$. Ciąg$\{b_n\}$ jest ograniczony od dołu, czyli istnieje liczba $N$ taka, że $\forall n \in \mathbb{N}\ b_n > N$. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > n_0$ $a_n > M - N$. Dodając nierówności stronami, otrzymujemy to co chcieliśmy: $a_n + b_n > M$.