

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 3

24.10.2022

1. Wyznacz dziedziny naturalne następujących funkcji:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}, & \text{(b)} \quad f(x) = \sqrt{2+x-x^2}, \\
 \text{(c)} \quad f(x) = \sqrt{3x-x^3}, & \text{(d)} \quad f(x) = \log(x^2-4), \\
 \text{(e)} \quad f(x) = \log(1-2\cos x), & \text{(f)} \quad f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}.
 \end{array}$$

2. Zapisz wzorem  $y = f(x)$  złożenie następujących funkcji, i wyznacz dziedzinę naturalną złożenia:

$$\text{(a)} \quad t = 2^x, \quad z = \sqrt[3]{t+1}, \quad y = z^2, \quad \text{(b)} \quad t = \sin x, \quad z = \log t, \quad y = \sqrt{1+z^2}.$$

3. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem ( $[ \dots ]$  oznacza część całkowitą, a  $\{ \dots \}$  oznacza część ułamkową):

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(x) = |x+1| + |x-1|, & \text{(b)} \quad f(x) = |x-3| - 2|x+1| + 2|x| - x + 1, \\
 \text{(c)} \quad f(x) = x^3 + 3x^2, & \text{(d)} \quad f(x) = -x^3 + 2x - 2, \\
 \text{(e)} \quad f(x) = 1 - \sin x, & \text{(f)} \quad f(x) = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right), \\
 \text{(g)} \quad f(x) = |\sin x|, & \text{(h)} \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}, \\
 \text{(i)} \quad f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|, & \text{(j)} \quad f(x) = |x^2 - 8x + 15|, \\
 \text{(k)} \quad f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|, & \text{(l)} \quad f(x) = \{ \cos x \}, \\
 \text{(m)} \quad f(x) = \left[ \frac{4}{\pi} \arctan x \right], & \text{(n)} \quad f(x) = 2\{ \sin x \} - \{ 2 \sin x \}.
 \end{array}$$

4. Znajdź funkcje odwrotne do:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(x) = 1 - 3x, & \text{(b)} \quad f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \neq 1, \\
 \text{(c)} \quad f(x) = x^2 - 2x, \quad x \geq 1, & \text{(d)} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}, \quad x \geq 0,
 \end{array}$$

5. Ciąg Fibonacciego określony jest rekurencyjnie w sposób następujący:  $F_1 = F_2 = 1$ , a następnie  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Znajdź wyrazy ciągu Fibonacciego o numerach od 3 do 12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  prawdziwa jest równość:  $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ .

6. Udowodnij, **korzystając jedynie z definicji**, zbieżność ciągów, znajdując ich granice:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad a_n = \frac{1}{n^2}, & \text{(b)} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \\
 \text{(c)} \quad a_n = \left( \frac{2}{3} \right)^n, & \text{(d)} \quad a_n = \frac{n+2}{n-1}, \quad n \geq 2, \\
 \text{(e)} \quad a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}, & \text{(f)} \quad a_n = \frac{3n^3 - 2n^2 - 7n + 5}{4n^3 + n - 6}.
 \end{array}$$

7. Udowodnij, że jeśli  $x$  jest liczbą rzeczywistą o rozwinięciu dziesiętnym

$$\beta, \alpha_1 \alpha_2 \dots,$$

to ciąg określony wzorem

$$a_n = \beta, \alpha_1 \dots \alpha_n$$

jest zbieżny do  $x$  ( , jest punktem dziesiętnym, a  $\beta \in \mathbb{Z}$ ).

8. Udowodnij, że granica sumy (różnicy, ilorazu) ciągów zbieżnych jest sumą (różnicą, ilorazem) ich granic. Oczywiście w przypadku ilorazu zakładamy, że ciąg w mianowniku ma wyrazy różne od zera, i że jego granica jest różna od zera.

9. Zbadaj monotoniczność następujących ciągów:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & a_n = n + \frac{1}{n}, \\
 \text{(b)} & a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2, \\
 \text{(c)} & a_n = \sqrt[n]{n!}, \\
 \text{(d)} & a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \\
 \text{(e)} & a_n = \frac{2^n}{n!}, \\
 \text{(f)} & a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}.
 \end{array}$$

10. Oblicz granice (być może niewłaściwe) ciągów:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & a_n = \frac{7n + (\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3 + 7n + 3}, \\
 \text{(b)} & a_n = \sqrt{n^2 + n} - n, \\
 \text{(c)} & a_n = \frac{\sin n}{n}, \\
 \text{(d)} & a_n = r^n, \quad r > 1, \\
 \text{(e)} & a_n = \sqrt[r]{r}, \quad 0 < r < 1, \\
 \text{(f)} & a_n = 2^n - \frac{1}{n}, \\
 \text{(g)} & a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 2}, \\
 \text{(h)} & a_n = \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n}, \\
 \text{(i)} & a_n = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 2}}, \\
 \text{(j)} & a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}, \\
 \text{(k)} & a_n = \frac{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n}{3^n}, \\
 \text{(l)} & a_n = \sqrt{3^n + 2^n}\sqrt{3^n + 1}, \\
 \text{(m)} & a_n = \sqrt[n^2]{n}, \\
 \text{(n)} & a_n = \sqrt[n]{n^2}, \\
 \text{(o)} & a_n = n(\sqrt{n^2 + 7} - n), \\
 \text{(p)} & a_n = \frac{n^2 + n + 1}{(n + \sin n)^2}, \\
 \text{(q)} & a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 + 2} + \frac{n^2 + 3}{n^3 + 3} + \dots + \frac{n^2 + n}{n^3 + n}, \\
 \text{(r)} & a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{(n + 1)^2}, \\
 \text{(s)} & a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+7} - \sqrt{n}}, \\
 \text{(t)} & a_n = r^n, \quad -1 < r < 1.
 \end{array}$$

11. Wypisz wzorem ciąg, dla którego  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ , i każdy z wyrazów jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right), \quad n \geq 2.$$

12. Wypisz wzorem ciąg, dla którego  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ , i każdy z wyrazów jest średnią geometryczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$