MATEMATYKA OBLICZENIOWA

LISTA ZADAŃ 3 - OBLICZENIA ZMIENNOPRZECINKOWE

3.04.2023

1. Napisz funkcję `de2bi-a.m` która bierze rozwinięcie dziesiętne, a następnie po odrzuceniu części ułamkowej wypisuje (np do tablicy) rozwinięcie dwójkowe. Zastosuj tą funkcję do liczby 107.625.
2. Napisz funkcję `de2bi-b.m` która bierze rozwinięcie dziesiętne, a następnie (np do tablicy) rozwinięcie dwójkowe części ułamkowej. Niech rozwinięcie dwójkowe będzie ograniczone do `N` pozycji. Zastosuj tą funkcję do liczb 107.625 oraz 0.1.
3. Stała `eps` w Matlabie oznacza dokładność maszynową. Sprawdź, czy $1 + \mathbf{eps} > 1$ oraz czy $1 + \mathbf{eps}/2 > 1$. Sprawdź, czy $1 + \mathbf{eps} > 1$ jeżeli $1 + \mathbf{eps}$ zapisane zostanie w pojedynczej precyzji.
4. Wyznacz stałą `eps` samodzielnie, badając liczby postaci 2^{-k}, $k = 1, 2, 3, \ldots$
5. Narysuj wykres funkcji $f(x) = (x + a) - a$ na $[0, 1]$ dla różnych wartości $a = 10^k$ dla $k = 1, 2, \ldots, 20$. Funkcję wyliczaj zgodnie ze wzorem, nie upraszczaj $f(x) = x$.
6. Porównaj wartości wyliczone według wzorów:
$$\textbf{Wzór 1: } x - \sqrt{1 + x^2}, \qquad\qquad \textbf{Wzór 2: } \frac{-1}{x + \sqrt{1 + x^2}}$$
dla $x = 10^k$, k=4,5,...,10.
7. Oblicz przybliżoną wartość e^{-5} posługując się 10 pierwszymi wyrazami szeregu Taylora. Porównaj wartości wyliczone według wzorów:
$$\textbf{Wzór 1: } e^{-5} \approx \sum_{n=0}^{9} \frac{(-5)^n}{n!}, \qquad\qquad \textbf{Wzór 2: } e^{-5} \approx \frac{1}{\sum_{n=0}^{9} \frac{5^n}{n!}}.$$
8. Mamy następujące wzory:
$$\pi = 4\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\Big) = 4 \sum_{\substack{n=1 \\ n\text{-nieparz.}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n},$$
$$\pi = 6\Big(0.5 + \frac{(0,5)^3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot (0,5)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot (0,5)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots\Big) = 6 \sum_{\substack{n=1 \\ n\text{-nieparz.}}}^{\infty} \frac{(n-2)!! \cdot (0,5)^n}{(n-1)!! \cdot n}.$$
Sprawdź przy pomocy Matlaba, który z nich jest numerycznie „lepszy”.
9. Przy pomocy Matlaba oblicz wartości, i sprawdź, czy są równe:
$$10\,000 - \sum_{n=1}^{100\,00} 0,1, \qquad\qquad 10\,000 - \sum_{n=1}^{80\,00} 0,125.$$
10. Wiadomo, że
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Spróbuj obliczyć tą granicę numerycznie, przyjmując $x = 10^{-k}$, $k = 1, \ldots, 16$.

11. Oblicz wartość wyrażeń, i sprawdź, czy są równe:

$$x\big(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\big), \qquad \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

dla $x = 10^k$, $k = 1, \ldots, 20$.

12. Całkując przez części otrzymujemy, że ciąg

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n \, e^x \, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

spełnia rekurencyjną zależność

$$I_n = 1 - nI_{n-1}, \qquad n \geq 1, \qquad I_0 = 1 - \frac{1}{e}.$$

Stosując twierdzenia z analizy wiadomo, że $I_n \to 0$. Sprawdź tę zbieżność Matlabem, stosując zależność rekurencyjną.

13. Załóżmy że mamy dostęp do 50 000 kont bankowych (wielu absolwentów IM pracuje w bankach...). Załóżmy, że salda tych kont są równomiernie rozłożone od 100 do 100 000 złotych, na przykład. Roczna stopa procentowa dla środków na kontach wynosi 5%, i odsetki są kapitalizowane dziennie. Ułamki groszy powinny być pomijane, ale załóżmy, że są przelewane na nasze własne konto, które początkowo jest puste. Napisz skrypt, który symuluje tą sytuację.