Pierwsza litera nazwiska

Egzamin 1 termin
9.02.23

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Niech f będzie jakąś funkcją na przedziale $[a,b]$. Niech

$$f_n(x) = \frac{[\,n\,f(x)\,]}{n}, \quad x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N},$$

($[\cdot]$ to część całkowita). Udowodnij, że ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do f na $[a,b]$.

Rozwiązanie: Mamy następujące proste oszacowania związane z $[\,\cdot\,]$:

$$n\,f(x) - 1 < [\,n\,f(x)\,] \leq n\,f(x)$$

$$f(x) - \frac{1}{n} < f_n(x) \leq f(x)$$

$$-\frac{1}{n} < f_n(x) - f(x) \leq 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}.$$

Różnica pomiędzy $f_n(x)$ a $f(x)$ jest więc dowolnie mała, niezależnie od $x \in [a,b]$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej i oblicz ją, jeżeli jest zbieżna

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx.$$

Rozwiązanie: Całka ma tylko 1 niewłaściwość, w $+\infty$. Liczymy:

$$\begin{aligned}
\int_1^M \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx &= \left\{\begin{aligned} t &= \frac{1}{x} \\ dt &= -\frac{1}{x^2}\,dx \end{aligned}\right\} \\
&= -\int_1^{\frac{1}{M}} te^{-t}\,dt \\
&= \int_{\frac{1}{M}}^1 te^{-t}\,dt \\
&= \int_{\frac{1}{M}}^1 t(-e^{-t})'\,dt \\
&= -t\,e^{-t}\Big|_{\frac{1}{M}}^1 + \int_{\frac{1}{M}}^1 e^{-t}\,dt \\
&= -\frac{1}{e} + \frac{e^{-\frac{1}{M}}}{M} - e^{-t}\Big|_{\frac{1}{M}}^1 \\
&= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + \frac{e^{-\frac{1}{M}}}{M} + e^{-\frac{1}{M}} \\
&\xrightarrow{M\to\infty} -\frac{2}{e} + 1.
\end{aligned}$$

Otrzymujemy więc, że całka jest zbieżna, oraz

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx = 1 - \frac{2}{e}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź pochodną funkcji określonej na przedziale $(-1,1)$ wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n.$$

Uwaga: znajdź tą pochodną w postaci „zwiniętej”, bez znaku $\sum$.

Rozwiązanie: Korzystamy z faktu, że szeregi potęgowe można różniczkować „wyraz za wyrazem”:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{n+1}\right)' \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n}\right)' \\
&= \left(\frac{x}{1-x}\right)' \\
&= \frac{x'(1-x) - x(1-x)'}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}}.$$

Rozwiązanie: Przekształcamy wyrażenie nieoznaczone postaci 1^∞:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}} &= \lim_{x\to 5} e^{\log(6-x)^{\frac{1}{x-5}}}\\ &= \lim_{x\to 5} e^{\frac{\log(6-x)}{x-5}}\\ &= e^{\lim_{x\to 5}\frac{\log(6-x)}{x-5}}.\end{aligned}$$

Wyrażenie w wykładniku jest nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, a funkcja wykładnicza jest ciągła. Obliczamy wykładnik, korzystając z reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\log(6-x)}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{\frac{-1}{6-x}}{1} = -1.$$

Ostatecznie,

$$\lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Udowodnij następującą nierówność

$$\log x < \frac{x}{e}, \qquad \forall\ x > 0,\ x \neq e.$$

Uwaga: $\log x$ to logarytm naturalny.

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję

$$f(x) = \frac{x}{e} - \log x.$$

Jej dziedziną jest $(0, \infty)$, i jest różniczkowalna.

$$f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}.$$

Rozważając znak pochodnej (ściśle ujemna na $(0, e)$ oraz ściśle dodatnia na (e, ∞)) widzimy, że $f(x)$ jest ściśle malejąca na $(0, e)$ oraz ściśle rosnąca na (e, ∞). W e ma więc ścisłe minimum $f(e) = 0$. Dla każdego $x \neq e$ mamy więc $f(x) > 0$, co jest dokładnie naszą nierównością.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x+2}}}.$$

Rozwiązanie: Używamy podstawienia:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x+2}}} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x+2} \\ dt = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2}\,dx \\ 3t^2 dt = dx \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{3t^2}{\sqrt{1+t}}\,dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} s = 1+t \\ ds = dt \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{3(s-1)^2}{\sqrt{s}}\,ds \\
&= \int \frac{3(s^2-2s+1)}{\sqrt{s}}\,ds \\
&= 3\int s^{\frac{3}{2}}\,ds - 6\int s^{\frac{1}{2}}\,ds + 3\int s^{-\frac{1}{2}}\,ds \\
&= 3\,\frac{s^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 6\,\frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\,\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{6}{5}\,(t+1)^{\frac{5}{2}} - 4\,(t+1)^{\frac{3}{2}} + 6\,(t+1)^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{6}{5}\sqrt{1+\sqrt[3]{x+2}}^{\,5} - 4\sqrt{1+\sqrt[3]{x+2}}^{\,3} + 6\sqrt{1+\sqrt[3]{x+2}} + C.
\end{aligned}$$

Równie dobrze można podstawić za nową zmienną cały mianownik.