Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 1
18.11.22

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność ciągu i znajdź granicę, jeżeli jest zbieżny:

$$a_n = \sqrt{n\left(n - \sqrt{n^2 - 1}\right)}.$$

Rozwiązanie: Piszemy:

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n} \cdot \sqrt{n - \sqrt{n^2 - 1}} \\
&= \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n - \sqrt{n^2 - 1}} \cdot \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}} \\
&= \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}} \\
&\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Rozwiąż nierówność

$$\frac{13}{x-3} - \frac{3}{x+1} < -4.$$

Rozwiązanie: Rozważmy najpierw przypadek $(x-3)(x+1) > 0$, czyli $x > 3$ lub $x < -1$. Mnożąc stronami przez $(x-3)(x+1)$ nierówność nie zmienia się

$$13(x+1) - 3(x-3) < -4(x-3)(x+1)$$
$$10x + 22 < -4x^2 + 8x + 12$$
$$2x^2 + x + 5 < 0.$$

Widać, że równanie $2x^2 + x + 5 = 0$ nie ma rzeczywistych pierwiastków, więc nierówność nie ma rozwiązań.
Rozważmy teraz przypadek $(x-3)(x+1) < 0$, czyli $x > -1 \wedge x < 3$. Po pomnożeniu stronami nierówność odwraca się, i przyjmuje postać, tak jak poprzednio

$$2x^2 + x + 5 > 0.$$

Ta ostatnia nierówność jest prawdziwa zawsze, więc rozwiązaniem całości zadania jest odcinek $(-1, 3)$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i}\right)^{11}.$$

Rozwiązanie:W postaci trygonometrycznej mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i} = \cos\frac{7\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{7\pi}{4}.$$

W takim razie:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i}\right)^{11} = \cos\frac{77\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{77\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność i ew. zbieżność absolutną szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że wyrazy szeregu są dodatnie, więc nie ma różnicy pomiędzy zbieżnością zwykłą i absolutna. Spodziewamy się, że wyrazy będą rzędu $\sim \frac{1}{n}$ (ze względu na stopnie wielomianów), więc korzystamy z kryterium porównawczego:

$$\frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47} > \frac{4n^2}{n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n}.$$

Szereg $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc nasz szereg również.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność i ew. zbieżność absolutną szeregu:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}.$$

Rozwiązanie: Jest to szereg naprzemienny, więc skorzystamy z kryterium Leibniza. Zauważmy, że $\frac{1}{n-\sqrt{n}} \to 0$, i sprawdźmy monotoniczność:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{n-\sqrt{n}} > \frac{1}{n+1-\sqrt{n+1}} \\
n-\sqrt{n} < n+1-\sqrt{n+1} \\
\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < 1 \\
1 < \sqrt{n+1}+\sqrt{n}.
\end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc wyjściowa też. Szereg jest więc zbieżny. Z drugiej strony zauważmy, że $\frac{1}{n-\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, więc z kryterium porównawczego szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$$

nie jest zbieżny. Szereg wyjściowy

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

jest więc zbieżny, ale nie absolutnie.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Udowodnij, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do 0 a ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to ciąg $\{a_n \cdot b_n\}$ jest zbieżny do 0.

Rozwiązanie: Ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to oznacza, że

$$\exists M \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| \leq M.$$

Skoro $a_n \to 0$ to także $|a_n| \to 0$. Mamy

$$|a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot M,$$
$$-|a_n| \cdot M \leq a_n \cdot b_n \leq |a_n| \cdot M,$$

więc z 3 ciągów $a_n \cdot b_n \to 0$.