Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 2
2.12.22

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Funkcja $\arctan(\frac{1}{x})$ nie jest określona w punkcie $x = 0$. Czy można nadać jej taką wartość w punkcie $x = 0$, żeby była w tym punkcie ciągła?

Rozwiązanie: Pytanie sprowadza się do tego, czy funkcja ma granicę w 0. Sprawdzamy granice jednostronne:

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2} \qquad \left(x = \frac{1}{t}\right),$$
$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to-\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2} \qquad \left(x = \frac{1}{t}\right).$$

Funkcja nie ma więc granicy w 0, w związku z tym nie może zostać przedłużona do ciągłej w 0.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz granicę (m i n to pewne liczby naturalne)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$$

Uwaga: nie można korzystać z reguły de l'Hospitala.

Rozwiązanie: Wiemy, że

$$x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1),$$

i podobnie dla n. Wstawiamy:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} \\
&= \frac{m}{n}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right).$$

Uwaga: nie można korzystać z reguły de l'Hospitala.

Rozwiązanie: Sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{4+2\frac{1}{x}-2\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Niech $a, b > 0$. Udowodnij, że równanie

$$a \sin(x) + b = x$$

ma co najmniej jeden dodatni pierwiastek, nie większy niż $a + b$.

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję pomocniczą

$$f(x) = x - a \sin(x) - b.$$

Zauważmy, że $f(0) = -b < 0$. Z drugiej strony, $f(a+b) = a - a \sin(a+b) \geq 0$. Albo więc $f(a+b) = 0$ (i wtedy $a+b$ jest pierwiastkiem), albo funkcja f zmienia znak na przedziale $[0, a+b]$, więc jako funkcja ciągła musi gdzieś w środku przyjąć wartość 0.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Wyznacz promień zbieżności R szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}.$$

Rozwiązanie: Wyrazy szeregu (łącznie z potęgą x) oznaczamy a_n i stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)(2n-1)!}{|x|^{2n-1}}\\ &= |x|^2\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2n)(2n+1)}\\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Granica ta jest równa 0 niezależnie od x, więc szereg jest zbieżny w każdym punkcie. Promień zbieżności jest więc nieskończony: $R=\infty$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Wyznacz promień zbieżności R szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Zbadaj zbieżność tego szeregu na końcach przedziału zbieżności, czyli w punktach $x = \pm R$.

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru na promień zbieżności ($a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Promień zbieżności wynosi więc $R = 1$. Dla $x = 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Szereg ten jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Dla $x = -1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Jest to szereg harmoniczny, rozbieżny.