



Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 2
2.12.22

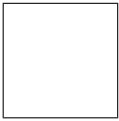
Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Funkcja $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ nie jest określona w punkcie $x = 0$. Czy można nadać jej taką wartość w punkcie $x = 0$, żeby była w tym punkcie ciągła?

Rozwiązanie: Pytanie sprowadza się do tego, czy funkcja ma granicę w 0. Sprawdzamy granice jednostronne:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2} && \left(x = \frac{1}{t}\right), \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2} && \left(x = \frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

Funkcja nie ma więc granicy w 0, w związku z tym nie może zostać przedłużona do ciągłej w 0.



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz granicę (m i n to pewne liczby naturalne)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$$

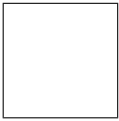
Uwaga: nie można korzystać z reguły de l'Hospitala.

Rozwiązanie: Wiemy, że

$$x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1),$$

i podobnie dla n . Wstawiamy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1} \\ &= \frac{m}{n}. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

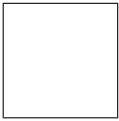
Zadanie 3. Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right).$$

Uwaga: nie można korzystać z reguły de l'Hospitala.

Rozwiązanie: Sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(2x + 1) - x^2(2x^2 - 1)}{(2x^2 - 1)(2x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{4 + 2\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

4

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Niech $a, b > 0$. Udowodnij, że równanie

$$a \sin(x) + b = x$$

ma co najmniej jeden dodatni pierwiastek, nie większy niż $a + b$.

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję pomocniczą

$$f(x) = x - a \sin(x) - b.$$

Zauważmy, że $f(0) = -b < 0$. Z drugiej strony, $f(a + b) = a - a \sin(a + b) \geq 0$. Albo więc $f(a + b) = 0$ (i wtedy $a + b$ jest pierwiastkiem), albo funkcja f zmienia znak na przedziale $[0, a + b]$, więc jako funkcja ciągła musi gdzieś w środku przyjąć wartość 0.

Nazwisko i imię:

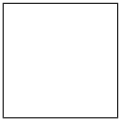
Zadanie 5. Wyznacz promień zbieżności R szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}.$$

Rozwiązanie: Wyrazy szeregu (łącznie z potęgą x) oznaczamy a_n i stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)(2n-1)!}{|x|^{2n-1}} \\ &= |x|^2 \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2n)(2n+1)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Granica ta jest równa 0 niezależnie od x , więc szereg jest zbieżny w każdym punkcie. Promień zbieżności jest więc nieskończony: $R = \infty$.



Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Wyznacz promień zbieżności R szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Zbadaj zbieżność tego szeregu na końcach przedziału zbieżności, czyli w punktach $x = \pm R$.

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru na promień zbieżności ($a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Promień zbieżności wynosi więc $R = 1$. Dla $x = 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Szereg ten jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Dla $x = -1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Jest to szereg harmoniczny, rozbieżny.