

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 1

9.10.2023

1. Przedstaw liczbę $0,1(270)$ w postaci ułamka zwykłego.
2. Pokaż, że rozwinięcie

$$x = 0,1234567891011121314151617181920212223\dots$$

złożone z kolejnych liczb naturalnych reprezentuje liczbę niewymierną.

3. Podaj trzy pierwsze cyfry po przecinku liczby $\sqrt[3]{7}$.
4. Pokaż, że liczby $\sqrt{24}$ i $\sqrt[5]{10}$ są niewymierne.
5. Udowodnij że zbiór liczb całkowitych nie jest ograniczony ani od góry ani od dołu.
6. Podaj przykład liczby x takiej że:
 - (a) $0 < x < 1$ i x jest niewymierna,
 - (b) $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ i x jest wymierna,
 - (c) x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,
 - (d) x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,
 - (e) $(x+1)^2$ jest niewymierna,
7. Korzystając z definicji znajdź kresy górny i dolny odcinka otwartego $(1, 2)$.
8. Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{k}; n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

9. Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

złożonego z odwrotności kolejnych liczb naturalnych.

10. Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

11. Udowodnij, że liczba $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ jest niewymierna.
12. Udowodnij, że liczba $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{6}$ jest niewymierna.
13. Udowodnij, że każdym przedziale otwartym (a, b) istnieje liczba niewymierna.
14. Udowodnij, że dowolne liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n prawdziwa jest nierówność

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

16. Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$\{x + y : x, y > 0, [x] + [y] = 3\}.$$

17. Wykaż, że

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2},$$

gdzie $\max\{x, y\}$ oznacza większą z liczb x i y , a $\min\{x, y\}$ mniejszą z tych liczb.

18. Pokaż, że $|a - b - c| \geq |a| - |b| - |c|$

19. Niech $x = 1,0234107\dots$, $y = 1,0235106\dots$. Czy jest prawdą, że

- (a) $1,02 < x \leq 1,03$?
- (b) $x + y > 2,04692$?
- (c) $x < y$?

20. Rozwiąż następujące równania i nierówności:

- (a) $|x + 1| = |x - 1|$,
- (b) $|1 - 2x| + |2x - 6| = x$,
- (c) $|3x| + 2 \leq |x - 6|$,
- (d) $|x^2 - 25| \leq 24$,
- (e) $|x| + |x + 1| + |x + 2| = x^2 + 2x + \frac{29}{9}$,
- (f) $|x + 10| = |2x + 1| + 3$,
- (g) $\frac{6 - 2x}{3 + x} > 2$,
- (h) $0 < \frac{2x - 1}{x - 1} < 2$,
- (i) $\frac{2x - 1}{x + 4} < \frac{x}{x + 4} < \frac{x + 1}{x + 4}$.

21. Czy jest prawdą, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność:

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| (a) $x \leq x $, | (b) $-x \leq x$, |
| (c) $1 \leq 1 + x + x$, | (d) $-1 \leq -1 + x + x$, |
| (e) $1 \leq 1 - x + x$, | (f) $-1 \leq -1 - x + x$, |
| (g) $x \leq x + 1 + 1$, | (h) $-x \leq -x + 1 + 1$, |
| (i) $x \leq x - 1 + 1$, | (j) $-x \leq -x - 1 + 1$. |

22. Udowodnij następujący wzór:

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n - 1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4}.$$

23. Udowodnij następujący wzór (dla $q \neq 1$):

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

24. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że:

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

25. Udowodnij następujący wzór:

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n - 1) \cdot 2^n + 1.$$