

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 7

20.11.2023

1. Oblicz granice:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}, & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \\
 \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1 + \log x}, & \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{-1/x} - 1}, \\
 \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{-1/x} - 1}, & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{-1/x} + 1}, \\
 \text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}, & \text{(h)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}, \quad \text{ pewne } a.
 \end{array}$$

2. Sprawdź, w których punktach funkcja  $f(x)$  jest ciągła a w których nieciągła (sgn  $x$  to znak  $x$ : dla  $x > 0$  sgn  $x = 1$ , dla  $x < 0$  sgn  $x = -1$ , a dla  $x = 0$  sgn  $x = 0$ ):

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x), & \text{(b)} \quad f(x) = \{x\} - (\{x\})^2, \\
 \text{(c)} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x & : 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & : 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & : x \geq 3, \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x) = \begin{cases} x & : x \neq 2 \\ \operatorname{sgn} x & : x = 2, \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, & \text{(f)} \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x^3 - x), \\
 \text{(g)} \quad f(x) = [x] - [\sqrt[3]{x}], & \text{(h)} \quad f(x) = x^3 \operatorname{sgn}(x), \\
 \text{(i)} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4} + 1}, & \text{(j)} \quad f(x) = [x^2], \\
 \text{(k)} \quad f(x) = \{\log_2 x\}, & \text{(l)} \quad f(x) = \frac{1}{\{x\}}, \\
 \text{(m)} \quad f(x) = \left| \left[ x + \frac{1}{2} \right] - x \right|, & \text{(n)} \quad f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0, \\
 \text{(o)} \quad f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 1, & \text{(p)} \quad f(x) = (-1)^{[x]}, \\
 \text{(q)} \quad f(x) = \frac{x^2 - x^3}{|x - 1|}.
 \end{array}$$

3. Określ wartość danej funkcji w 0 tak, aby była ciągła:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}, \quad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}.$$

4. Oblicz granice jednostronne w 0 funkcji ( $a \neq 0$ ):

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{x}{a} \left[ \frac{b}{x} \right], \quad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{b}{x} \left[ \frac{x}{a} \right].$$

5. Dla jakich wartości parametrów  $a$  i  $b$  funkcja  $f(x)$  jest ciągła? Naszkicuj wykres  $f(x)$  dla takich  $a$  i  $b$ .

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & : x < 1 \\ x^2 & : 1 \leq x < 2 \\ ax - b & : 2 \leq x. \end{cases} \quad (b) \quad f(x) = \begin{cases} x & : x < 1 \\ x^2 + ax + b & : 1 \leq x < 2 \\ x + 3 & : 2 \leq x. \end{cases}$$