ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 8

27.11.2023

1. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Korzystając z definicji oblicz $f'(8)$.
2. Niech $f(x) = x^5$. Korzystając z definicji wyprowadź wzór na $f'(x)$.
3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Dobierz stałe a, b, c tak, aby funkcja

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & : \quad |x| \geq 1/n, \\ ax^2 + bx + c & : \quad |x| < 1/n \end{cases}$$

   była różniczkowalna. Oblicz pochodną $f_n'(x)$, naszkicuj wykres funkcji $f_n(x)$ oraz wykres pochodnej.
4. Oblicz pochodną następujących funkcji. Podaj w jakim zbiorze istnieje pochodna:

(a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$,
(b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$,
(c) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$,
(d) $f(x) = (1 + \sqrt{x})(1 + x^{1/3})(1 + x^{1/4})$,
(e) $f(x) = (x^2 + 1)^4$,
(f) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$,
(g) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$,
(h) $f(x) = (1 + 2x)^{30}$,
(i) $f(x) = \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{1/3}$,
(j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$,
(k) $f(x) = 2^{x+3}$,
(l) $f(x) = x10^x$,
(m) $f(x) = \frac{x}{e^x}$,
(n) $f(x) = x^2(x + 1)e^x$,
(o) $f(x) = e^x \log x$,
(p) $f(x) = \frac{\log x}{e^x}$,
(q) $f(x) = e^{x^2}$,
(r) $f(x) = x^{10} \log x$,
(s) $f(x) = e^{e^x}$,
(t) $f(x) = \log \log x$,
(u) $f(x) = \log_{10}(x - 1)$,
(v) $f(x) = 10^{2x-3}$,
(w) $f(x) = 2^{3^x}$,
(x) $f(x) = \log_2 |\log_3(\log_5 x)|$,
(y) $f(x) = e^{\sqrt{\log x}}$,
(z) $f(x) = x^{x^2}$,
(aa) $f(x) = x^{x^x}$,
(ab) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$,
(ac) $f(x) = (\log x)^x$,
(ad) $f(x) = e^{-x^2} \log x$,
(ae) $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$,
(af) $f(x) = x^5(x^6 - 8)^{1/3}$,
(ag) $f(x) = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$,
(ah) $f(x) = \log \frac{1}{1 + x}$,
(ai) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$,
(aj) $f(x) = |x|^3$,
(ak) $f(x) = \operatorname{sgn} x$,
(al) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$,

(am) $f(x) = e^{-|x|}$, (an) $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2} - 1}$,

(ao) $f(x) = \{x\}$, (ap) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$

(aq) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^5 - x^3)$, (ar) $f(x) = \dfrac{\pi^{10}}{\pi - e}$,

(as) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x < 0, \\ 1+x & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$ (at) $f(x) = x^7 + e^2$,

(au) $f(x) = (x+e)^{20}$, (av) $f(x) = e^e$.

5. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta od góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania zużyć jak najmniej materiału?
6. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale:

(a) $f(x) = x^2 + 2x + 21$, $[-2, 7]$, (b) $f(x) = |x^2 - 1| + 3x$, $[-2, 2]$,

(c) $f(x) = |x+1| + x^2$, $[-10, 10]$, (d) $f(x) = |10x - 1| + x^3$, $[0, 1]$,

(e) $f(x) = \log(x) - \dfrac{x}{10}$, $[1, e^3]$, (f) $f(x) = |\sin(x)| + \dfrac{x}{2}$, $[0, 2\pi]$,

(g) $f(x) = x^{1/x}$, $[2, 4]$, (h) $f(x) = 3\sin(x) + \sin(3x)$, $[0, 2\pi]$.

7. Oblicz granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} \right)$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(x) + x^2 - 2}{x\sin(x) - x^2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$, (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x)}{x}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$, (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{e^x} - e}{x}$,

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, (j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x)}{x-1}$,

(k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x) - x + 1}{(x-1)^2}$, (l) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\log\log(x)}{x - e}$,

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{e^x}$, (n) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^x - 4}{x - 2}$.