Pierwsza litera nazwiska

Egzamin 1 termin
30.01.24

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Rozwiązanie: Ponieważ $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, więc granica jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $1^{\pm\infty}$. Piszemy więc:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(\frac{2}{\pi}\arccos x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(\frac{2}{\pi}\arccos x)}{x}}.$$

Granicę w wykładniku liczymy z reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\frac{2}{\pi}\arccos x)}{x} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arccos(x)}\cdot\frac{-\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

Ostatecznie,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Wyznacz ekstrema funkcji

$$f(x) = |x| \cdot e^{-|x-1|}.$$

Rozwiązanie: Dla $x < 0$ mamy

$$f(x) = -x \cdot e^{x-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -e^{x-1} - xe^{x-1} = -e^{x-1}(x+1).$$

Widzimy, że $f'(x) > 0$ dla $x < -1$ i $f'(x) < 0$ dla $x > -1$, czyli w $x = -1$ mamy ekstremum (maksimum).

Dla $x = 0$ mamy $f(x) = 0$, a skoro poza 0 funkcja jest dodatnia, więc w $x = 0$ też mamy ekstremum (minimum).

Dla $0 < x < 1$ mamy

$$f(x) = x \cdot e^{x-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = e^{x-1}(x+1),$$

więc $f'(x) > 0$ i funkcja rośnie, nie ma więc ekstremów.

Dla $x > 1$ mamy

$$f(x) = x \cdot e^{1-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x),$$

pochodna więc jest ujemna i funkcja maleje, nie ma więc ekstremów.

W końcu zauważmy, że w $x = 1$ funkcja ma ekstremum (maksimum), bo rośnie po lewej a maleje po prawej.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź pole figury ograniczonej krzywą $y = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, prostą $y = \frac{1}{2e}(e^2+1)$ i osią OY.

Rozwiązanie: Mamy

$$\frac{1}{2e}(e^2+1) = \frac{e+\frac{1}{e}}{2} = \cosh 1,$$

więc krzywa $y = \cosh x$ leży poniżej prostej $y = \frac{1}{2e}(e^2+1)$ dla $0 \leq x \leq 1$, i przecinają się w punkcie $(1, \cosh 1)$. Pole jest więc równe

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{1}{2e}(e^2+1) - \frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) dx &= \frac{1}{2e}(e^2+1) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^x dx - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x} dx \\
&= \frac{e+\frac{1}{e}}{2} - \frac{1}{2}e^x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}e^{-x}\Big|_0^1 \\
&= \frac{e+\frac{1}{e}}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{e}}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót obszaru pomiędzy parabolami $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ wokół osi OX

Rozwiązanie: Mamy wzór

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx,$$

wstawiając dostajemy

$$V = \pi \int_0^1 \left((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right) dx = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \pi \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \Big) = \pi \frac{3}{10}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę
$$\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy:
$$\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}} = \left\{\begin{aligned} & t=\sqrt{3x+1} \\ & dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\cdot 3dx \\ & \frac{2}{3}\, t\, dt = dx \end{aligned}\right\}$$
$$= \frac{2}{3}\int_1^4 \frac{t}{2\left(\frac{t^2-1}{3}\right)+t}\,dt$$
$$= 2\int_1^4 \frac{t}{2t^2+3t-2}\,dt$$
$$= 2\int_1^4 \frac{t}{(2t-1)(t+2)}\,dt.$$

Rozkładamy na ułamki proste
$$\frac{t}{(2t-1)(t+2)} = \frac{A}{2t-1}+\frac{B}{t+2} = \frac{\frac{1}{5}}{2t-1}+\frac{\frac{2}{5}}{t+2}.$$

Ostatecznie
$$2\int_1^4 \frac{t}{2t^2+3t-2}\,dt = \frac{2}{5}\int_1^4 \frac{dt}{2t-1}+\frac{4}{5}\int_1^4 \frac{dt}{t+2}$$
$$= \frac{1}{5}\log|2t-1|\Big|_1^4 + \frac{4}{5}\log|t+1|\Big|_1^4$$
$$= \frac{1}{5}(\log 7-\log 1)+\frac{4}{5}(\log 6-\log 3)$$
$$= \frac{1}{5}\log 7+\frac{4}{5}\log 2.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Pokaż, że ciąg funkcyjny

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}$$

jest zbieżny w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$, ale nie jest zbieżny jednostajnie na $(-\infty, \infty)$. Pokaż, że ciąg ten jest zbieżny jednostajnie na półprostej $[0, \infty)$.

Rozwiązanie: Dla ustalonego $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{1+(x+n)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{x}{n}+1\right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Zbieżność nie jest jednostajna, bo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = f_n(-n) = 1,$$

niezależnie od n. Z drugiej strony, dla $x \geq 0$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2} \leq \frac{1}{1+n^2},$$

niezależnie od x. Zbieżność jest więc jednostajna.