

**Kolokwium 3**
5.01.24

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Dla $p > 0$ znajdź granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Rozwiązanie: Mamy:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^p.$$

Punkty $\frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$ tworzą podział przedziału $[0, 1]$ na n podprzedziałów równej długości $\frac{1}{n}$. $\left(\frac{i}{n}\right)^p$ to wartości funkcji x^p w punktach podziału, więc z twierdzenia o zbieżności sum Riemanna sumy te zbiegają do całki:

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

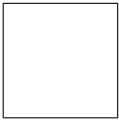
Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz pole figury ograniczonej krzywą daną równaniem

$$y^2 = x^2(1 - x^2).$$

Rozwiązanie: Figura to obszar pomiędzy wykresami funkcji $f_1(x) = -\sqrt{x^2(1 - x^2)} = -|x|\sqrt{1 - x^2}$ oraz $f_2(x) = |x|\sqrt{1 - x^2}$ dla $x \in [-1, 1]$. Pole to jest więc równe:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^1 2|x|\sqrt{1 - x^2} dx \\ &= 2 \int_0^1 2x\sqrt{1 - x^2} dx \quad \text{bo funkcja jest parzysta} \\ &= \left. \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right\} \\ &= -2 \int_1^0 \sqrt{t} dt \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{t} dt \\ &= 2 \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 \\ &= 2 \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

3

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz długość krzywej będącej wykresem funkcji

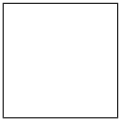
$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [0, 4].$$

Rozwiązanie: Mamy

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} x},$$

a więc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = 1 + \frac{9}{4} x \\ dt = \frac{9}{4} dx \end{array} \right\} \\ &= \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{t} dt \\ &= \frac{4}{9} \left. t^{\frac{3}{2}} \right|_1^{10} \\ &= \frac{8}{27} \left(10^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{8}{27} \left(\sqrt{1000} - 1 \right). \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

4

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{e^x - 1} \\ dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} e^x dx \end{array} \right\} \rightarrow e^x = t^2 + 1 \\ &= 2 \int (t^2 + 1) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} + t \right) + C \\ &= \frac{2}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + 2 (e^x - 1)^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx.$$

Rozwiązanie: Mamy rozkład mianownika: $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, a więc także rozkład na ułamki proste:

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Przyrównując stronami wyznaczamy stałe: $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ i $C = \frac{1}{3}$. Otrzymujemy:

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Obie całki liczymy osobno:

$$\int \frac{dx}{x - 1} = \log|x - 1| + C.$$

Drugą całkę rozkładamy dodatkowo:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1 - 3}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

W pierwszej z tych dwóch całek robimy podstawienie:

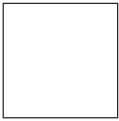
$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + x + 1 \\ dt = (2x + 1)dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log(x^2 + x + 1) + C.$$

ostatnią całkę sprowadzamy do arcusa tangensa:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(t) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx = \frac{1}{3} \log|x - 1| - \frac{1}{6} \log(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$



Pierwsza litera nazwiska

6

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź punkt przecięcia stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $(2, 4)$ z osią OY .

Rozwiązanie: Mamy $f'(x) = 2x$, czyli $f'(2) = 4$. Równanie stycznej do wykresu w punkcie $(2, 4)$ ma postać:

$$y - 4 = 4(x - 2), \quad \text{czyli} \quad y = 4x - 4.$$

Podstawiamy $x = 0$ i wychodzi $y = -4$. Punktem przecięcia jest więc punkt $(0, -4)$.