Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 3
5.01.24

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Dla $p > 0$ znajdź granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Rozwiązanie: Mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^p.$$

Punkty $\frac{i}{n}$, $i = 1, \ldots, n$ tworzą podział przedziału $[0, 1]$ na n podprzedziałów równej długości $\frac{1}{n}$. $(\frac{i}{n})^p$ to wartości funkcji x^p w punktach podziału, więc z twierdzenia o zbieżności sum Riemanna sumy te zbiegają do całki:

$$\int_0^1 x^p\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz pole figury ograniczonej krzywą daną równaniem

$$y^2 = x^2(1 - x^2).$$

Rozwiązanie: Figura to obszar pomiędzy wykresami funkcji $f_1(x) = -\sqrt{x^2(1-x^2)} = -|x|\sqrt{1-x^2}$ oraz $f_2(x) = |x|\sqrt{1-x^2}$ dla $x \in [-1, 1]$. Pole to jest więc równe:

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-1}^{1} 2|x|\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= 2\int_0^1 2\,x\,\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \text{bo funkcja jest parzysta} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{array} \right\} \\
&= -2\int_1^0 \sqrt{t}\,dt \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{t}\,dt \\
&= 2\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 \\
&= 2\,\frac{2}{3} \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz długość krzywej będącej wykresem funkcji

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [0, 4].$$

Rozwiązanie: Mamy

$$f'(x) = \frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}\, x},$$

a więc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}\, x}\, dx \\ &= \left\{ \begin{array}{c} t = 1 + \frac{9}{4}x \\ dt = \frac{9}{4}\, dx \end{array} \right\} \\ &= \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{t}\, dt \\ &= \frac{4}{9}\, \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^{10} \\ &= \frac{8}{27} \left(10^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{8}{27} \Big(\sqrt{1000} - 1 \Big). \end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} &= \left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt{e^x - 1} \\ dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\, e^x\, dx \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad e^x = t^2 + 1 \\
&= 2\int (t^2+1)dt \\
&= 2\Big(\frac{t^3}{3} + t\Big) + C \\
&= \frac{2}{3}\left(e^x - 1\right)^{\frac{3}{2}} + 2\left(e^x - 1\right)^{\frac{1}{2}} + C.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx.$$

Rozwiązanie: Mamy rozkład mianownika: $(x^3-1) = (x-1)(x^2+x+1)$, a więc także rozkład na ułamki proste:

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Przyrównując stronami wyznaczamy stałe: $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ i $C = \frac{1}{3}$. Otrzymujemy:

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Obie całki liczymy osobno:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \log|x-1| + C.$$

Drugą całkę rozkładamy dodatkowo:

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

W pierwszej z tych dwóch całek robimy podstawienie:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x^2+x+1 \\ dt = (2x+1)dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log(x^2+x+1) + C.$$

ostatnią całkę sprowadzamy do arcusa tangensa:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(t) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź punkt przecięcia stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $(2, 4)$ z osią OY.

Rozwiązanie: Mamy $f'(x) = 2x$, czyli $f'(2) = 4$. Równanie stycznej do wykresu w punkcie $(2, 4)$ ma postać:

$$y - 4 = 4(x - 2), \quad \text{czyli} \quad y = 4x - 4.$$

Podstawiamy $x = 0$ i wychodzi $y = -4$. Punktem przecięcia jest więc punkt $(0, -4)$.