SZEREGI I TRANSFORMATA FOURIERA

LISTA ZADAŃ 1

19.02.2024

1. Mówimy, że ciąg liczb zespolonych $\{w_n\}$ jest zbieżny, jeżeli istnieje liczba zespolona w taka, że $|w_n - w| \to 0$. Liczbę w nazywamy granicą ciągu $\{w_n\}$: $w = \lim_{n\to\infty} w_n$. Pokaż, że ciąg zbieżny ma tylko jedną granice..
2. Mówimy, że ciąg liczb zespolonych $\{w_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego, jeżeli
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0 \ |w_n - w_m| < \epsilon.$$
Pokaż, że ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy jest Cauchy'ego. Można wykorzystać analogiczne twierdzenie dla ciągów rzeczywistych.
3. Mówimy, że szereg o współczynnikach zespolonych $\sum z_n$ jest zbieżny, jeżeli jego ciąg sum częściowych
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$$
jest zbieżny. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych takim, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że jeżeli $\{z_n\}$ jest ciągiem liczb zespolonych takim, że $|z_n| \leq a_n$ dla prawie wszystkich n to szereg $\sum z_n$ jest zbieżny.
4. Dla $z \in \mathbb{C}$ definiujemy funkcję wykładniczą
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$
Pokaż, że definicja ma sens, to znaczy powyższy szereg jest zbieżny dla każdej liczby $z \in \mathbb{C}$. Pokaż, że zbieżność jest jednostajna na każdym ograniczonym podzbiorze $\mathbb{C}$.
5. Udowodnij, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi
$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$
6. Udowodnij, że dla $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$e^{x+\mathbf{i}y} = e^x(\cos y + \mathbf{i} \sin y).$$
Pokaż, że $|e^{x+\mathbf{i}y}| = e^x$.
7. Pokaż, że $e^z = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 2\pi k\mathbf{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
8. Pokaż, że każda liczba $z \in \mathbb{C}$ może być zapisana w postaci
$$z = r\, e^{\mathbf{i}\theta},$$
gdzie r jest wyznaczone jednoznacznie w zakresie $0 \leq r < \infty$ a $\theta \in \mathbb{R}$ jest wyznaczona z dokładnością do całkowitej wielokrotności 2π. Pokaż, że $r = |z|$ oraz $\theta = \arctan(y/x)$ jeżeli te wzory mają sens.
9. Pokaż, że dla $\theta \in \mathbb{R}$
$$\cos\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2} \qquad \text{oraz} \qquad \sin\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}.$$

10. Sprawdź, że funkcja $f(x) = e^{inx}$ jest okresowa z okresem 2π oraz

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0, \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Użyj tego faktu do wykazania następujących zależności:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = m, \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq m. \end{cases}$$

Podobnie, pokaż, że

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = m, \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq m. \end{cases}$$

Pokaż też, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx = 0 \qquad \text{dla dowolnych} \qquad m, n.$$

11. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, t \in \mathbb{R}$ istnieją $A, \varphi \in \mathbb{R}$ takie, że

$$a\,\cos t + b\,\sin t = A\,\cos(t - \varphi).$$

12. Pokaż, że jeżeli f jest całkowalna na skończonych przedziałach i T okresowa, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-T}^{b-T} f(x)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx \qquad \text{dla dowolnych } a, b,$$

oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \qquad \text{dla dowolnych } a, b \text{ takich że } b - a = T.$$

13. Niech f będzie 2π okresowa, i całkowalna na $[-\pi, \pi]$.
   - Pokaż, że szereg Fouriera f można zapisać jako:

   $$\hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)\big)\,\cos n\theta + \mathbf{i}\big(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)\big)\,\sin n\theta.$$

   - Pokaż, że jeżeli f jest parzysta, to $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ i szereg redukuje się do szeregu cosinusów.
   - Pokaż, że jeżeli f jest nieparzysta, to $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n)$ i szereg redukuje się do szeregu sinusów.
   - Jeżeli $f(\theta + \pi) = f(\theta)$ dla wszystkich θ to $\hat{f}(n) = 0$ dla wszystkich nieparzystych n.
   - Pokaż, że f ma wartości rzeczywiste wtedy i tylko wtedy gdy $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$ dla wszystkich n.