SZEREGI I TRANSFORMATA FOURIERA

LISTA ZADAŃ 2

26.02.2024

1. Niech f będzie 2πokresową funkcją nieparzystą, zadaną na przedziale $[0,\pi]$wzorem $f(x) = x\,(\pi - x)$.
   - Narysuj wykres f.
   - Oblicz współczynniki Fouriera f i pokaż, że

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{n\geq 1\\ n-\text{nieparz.}}} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

2. Na przedziale $[-\pi,\pi]$ mamy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \ |x| > \delta, \\ 1 - |x|/\delta & : \ |x| \leq \delta. \end{cases}$$

   Pokaż, że

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\delta}{n^2\pi\delta} \cos nx.$$

3. Niech f będzie dana na przedziale $[-\pi,\pi]$ wzorem $f(x) = |x|$.
   - Narysuj wykres f.
   - Oblicz współczynniki Fouriera f, i pokaż, że

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : \ n = 0, \\ \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & : \ n \neq 0. \end{cases}$$

   - Jak wygląda rozwinięcie f w szereg sinusów i cosinusów?
   - Podstawiając $x = 0$ pokaż, że

$$\sum_{\substack{n\geq 1\\ n-\text{nieparz.}}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Niech $\{a_n\}_{n=1}^N$ i $\{b_n\}_{n=1}^N$ będą skończonymi ciągami liczb zespolonych. Niech $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ będzie sumą częściową, przy czym przyjmujemy $B_0 = 0$.
   - Udowodnij wzór na sumowanie przez części:

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

   - Wywnioskuj z powyższego tak zwane kryterium Dirichleta zbieżności szeregów: jeżeli sumy częściowe szeregu $\sum b_n$ są wspólnie ograniczone, a $\{a_n\}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych malejącym monotonicznie i zbieżnym do 0, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

5. Sprawdź, że

$$\frac{1}{2\mathbf{i}} \sum_{n\neq 0} \frac{e^{\mathbf{i}nx}}{n}$$

jest szeregiem Fouriera tak zwanego przebiegu piłokształtnego, czyli funkcji 2π okresowej, danej przez $f(0) = 0$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & : -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & : 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Zauważ, że funkcja ta nie jest ciągła, ale jej szereg Fouriera jest zbieżny w każdym punkcie. W szczególności zauważ, że suma szeregu w 0 jestśrednią wartością granic jednostronnych f w 0. (Wsk.: użyj kryterium Dirichleta.)

6. Niech $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ będzie funkcją charakterystyczną przedziału $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, czyli

$$\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1 & : x \in [a, b], \\ 0 & : x \notin [a, b]. \end{cases}$$

   - Pokaż, że szereg Fouriera f jest dany przez

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-\mathbf{i}na} - e^{-\mathbf{i}nb}}{2\pi \mathbf{i} n} e^{\mathbf{i}nx}.$$

   - Pokaż, że jeżeli $a \neq b$ oraz $a \neq -\pi$ lub $b \neq \pi$ to szereg Fouriera nie jest absolutnie zbieżny dla żadnego x. (Wsk.: wystarczy pokazać, że dla wielu n zachodzi $|\sin nx_0| \geq c > 0$, gdzie $x_0 = (b-a)/2$.)
   - Pokaż, że szereg Fouriera jest jednak zbieżny dla każdego x. Co się dzieje w przypadku $a = -\pi$ lub $b = \pi$?

7. Niech f będzie 2π okresową funkcją, która należy do klasy C^k. Pokaż, że

$$\hat{f}(n) = O(1/|n|^k) \qquad \text{dla } |n| \to \infty.$$

Powyższa notacja znaczy, że istnieje stała C taka, że $|\hat{f}(n)| \leq C/|n|^k$. (Wsk.: całkuj przez części.)

8. Przypuśćmy, że $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem funkcji całkowalnych na przedziale $[-\pi, \pi]$ takich, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_k(x) - f(x)|\, dx \to 0 \qquad \text{dla } k \to \infty.$$

Pokaż, że $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$ dla $k \to \infty$, jednostajnie ze względu na n.