SZEREGI I TRANSFORMATA FOURIERA

LISTA ZADAŃ 3

11.03.2024

1. Pokaż, że jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny do s, to jest także zbieżny do s w sensie Cesàro (współczynniki a_n zespolone).
2. Pokaż, że jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny do s, to jest także zbieżny do s w sensie Abela (współczynniki a_n zespolone).
   Wsk.: Można założyć, że $s = 0$. Niech $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Wtedy $\sum_1^N a_n r^n = (1 - r) \sum_1^N s_n r^n + s_N r^{N+1}$.
3. Pokaż, że istnieją szeregi rozbieżne, ale zbieżne w sensie Abela.
   Wsk.: $a_n = (-1)^n$.
4. Pokaż, że jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny do s w sensie Cesàro to jest też zbieżny do s a sensie Abela.
   Wsk.: Zauważ, że $\sum a_n r^n = (1-r)^2 \sum n \sigma_n r^n$, gdzie $\sigma_n = (s_1 + \cdots + s_n)/n$, a s_n to sumy częściowe $\sum a_n$.
5. Pokaż, że istnieją szeregi zbieżne w sensie Abela ale nie zbieżne w sensie Cesàro.
   Wsk.: Spróbuj $a_n = (-1)^n n$.
6. Udowodnij, że jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny do s metodą Cesàro, oraz $a_n = o(1/n)$, to jest także zbieżny do s w zwykłym sensie.
   Wsk.: $s_n - \sigma_n = (a_2 + \cdots + (n-1)a_n)/n$.
7. Pokaż, że powyższe stwierdzenie pozostaje prawdziwe, jeżeli metodę Cesàro zastąpić metodą Abela.
   Wsk.: Oszacuj różnicę odpowiednich sum częściowych dla $r = 1 - 1/N$.
8. Przypuśćmy, że f ma w x_0 nieciągłość skokową, to znaczy poniższe granice istnieją, ale są różne
   $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-), \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+).$$
   Pokaż, że szereg Fouriera f jest w x_0 zbieżny w sensie Abela do średniej arytmetycznej tych wartości.
9. Pokaż, że powyższe zadanie jest prawdziwe także dla zbieżności w sensie Cesàro.
10. Niech D_n będzie jądrem Dirichleta, i niech
    $$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| \, dx.$$
    Udowodnij, że $L_n \geq c \log n$ dla pewnej stałej c.
    Wsk.: Wykorzystaj oszacowanie $\sum_1^N 1/n \geq c \log N$.