SZEREGI I TRANSFORMATA FOURIERA

LISTA ZADAŃ 4

25.03.2024

1. Niech
$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \; x = 0 \\ \log(1/x) & : \; 0 < x \le 2\pi, \end{cases}$$
i niech funkcje f_n będą obcięciami:
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & : \; 0 \le x \le 1/n \\ f(x) & : \; 1/n < x \le 2\pi. \end{cases}$$
Udowodnij, że f_n jest ciagiem Cauchy'ego w $L^2(\mathbb{T})$, zbieżnym do f.
2. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie dany wzorem
$$a_n = \begin{cases} 1/n & : \; n \ge 1 \\ 0 & : \; n \le 0. \end{cases}$$
Pokaż, że funkcja o takich współczynnikach Fouriera nie może być ograniczona.
3. Pokaż, że szereg trygonometryczny
$$\sum_{n \ge 2} \frac{1}{\log n} \sin nx$$
jest zbieżny dla każdego x, a jego granica nie jest funkcją ograniczoną.
4. Używając równości Parsevala dla 2π okresowej funkcji danej przez $f(x) = |x|$ na $[-\pi, \pi]$ pokaż, że
$$\sum_{\substack{n=1 \\ n-\text{nieparz.}}}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$
5. Używając równości Parsevala dla 2π okresowej nieparzystej funkcji danej przez $f(x) = x(\pi - x)$ na $[0, \pi]$ pokaż, że
$$\sum_{\substack{n=1 \\ n-\text{nieparz.}}}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{960}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$
6. Pokaż, że jeżeli α nie jest całkowite, to szeregiem Fouriera funkcji danej przez
$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{\mathbf{i}(\pi - x)\alpha} \qquad \text{na } [0, 2\pi]$$
jest
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathbf{i}nx}}{n + \alpha}.$$
Zastosuj równość Parsevala żeby uzyskać
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}$$

7. Udowodnij, że
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$
Wsk.: Całka z jądra Dirichleta wynosi 2π, zauważ, że funkcja $(1/\sin(x/2)) - 2/x$ jest ciągła na $[-\pi, \pi]$ i wykorzystaj lemat Riemanna-Lebesgue's.

8. Pokaż, że jeżeli f jest 2π okresowa i klasy C^k na $\mathbb{R}$ to
$$\hat{f}(n) = o(1/|n|^k).$$
Wsk.: Zastosuj lemat Riemanna-Lebesgue'a

9. Pokaż, że jeżeli f jest 2π okresowa i klasy C^1 na $\mathbb{R}$ to jej szereg Fouriera jest absolutnie zbieżny.
Wsk.: Zastosuj nierówność Cauchy'ego Schwarza i równość Parsevala dla f'.