

# SZEREGI I TRANSFORMATA FOURIERA

## LISTA ZADAŃ 5

13.05.2024

1. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & : |x| \leq 1 \\ 0 & : |x| > 1. \end{cases}$$

Oblicz  $\hat{f}$ .

2. Sprawdź:

- $f(\cdot + h)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{2\pi i h \xi}$ ,
- $(f e^{-2\pi i(\cdot)h})^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi + h)$ ,
- $f(\delta \cdot)^\wedge(\xi) = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$ ,
- $\hat{f}'(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$ ,
- $(-2\pi i(\cdot)f)^\wedge(\xi) = \hat{f}'(\xi)$ .

3. Sprawdź, że splot jest łączny i przemienny.

4. Niech

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Udowodnij, że  $\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ .

Wsk.: Oblicz transformatę odwrotną funkcji  $e^{-2\pi|\xi|}$

5. Niech  $f$  będzie całkowalna i taka, że

$$\hat{f}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}\right), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Udowodnij, że

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C |h|^\alpha,$$

(warunek Höldera rzędu  $\alpha$ ).

Wsk.: Wyraż różnicę przy pomocy  $\hat{f}$  i szacuj całkę osobno dla  $|\xi| \leq 1/|h|$  oraz  $|\xi| \geq 1/|h|$ .

6. Niech  $f$  będzie całkowalna i ciągła, wtedy  $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$  dla  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Wsk.: Zapisz

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x - 1/2\xi)) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

7. Niech

$$\mathcal{F}_R(x) = \begin{cases} R \left( \frac{\sin \pi x R}{\pi x R} \right)^2 & : |x| \neq 0 \\ R & : x = 0. \end{cases}$$

(Jądro Fejera na  $\mathbb{R}$ .) Pokaż, że

$$(f * \mathcal{F}_R)(x) = \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

8. Udowodnij, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_N(x+n) = F_N(2\pi x),$$

( $F_N$  - jądro Fejera na  $[-\pi, \pi]$ ).