

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 13

13.01.2025

1. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi:

(a) $y = x^2$ i $y = 2x + 5$, (b) $y = e^x$ i prostą przechodzącą przez punkty $(0, 1)$ i $(1, e)$,

(c) $y = \sin(x)$ i $y = \frac{2x}{\pi}$, (d) $y = x^4$ i $y = x^3$,

(e) $y = \frac{1}{x}$ i $y = \frac{5}{2} - x$, (f) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$ i $x = 2$.

2. Oblicz długość łuku krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ dla podanych $f(x)$ i $[a, b]$:

(a) x , $[1, 2]$, (b) $2x - 3$, $[-7, 12]$, (c) e^x , $[1, 2]$, (d) $\sqrt{x^3}$, $[6, 10]$, (e) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $[0, 1]$.

3. Dla danych $f(x)$ i $[a, b]$ oblicz pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX :

(a) x^3 , $[0, 5]$, (b) e^{-x} , $[0, 10]$, (c) $\sqrt{x}$, $[0, 4]$, (d) $\sin(x)$, $[0, \pi]$, (e) $\cos(7x)$, $[0, 2\pi]$.

4. Dla danych $f(x)$ i $[a, b]$ oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX :

(a) $\sqrt{x}$, $[0, 1]$, (b) x , $[1, 5]$, (c) x^7 , $[0, 10]$, (d) e^x , $[-3, 0]$, (e) $\sin(x)$, $[0, \frac{3\pi}{2}]$.

5. Oblicz długość łuku krzywej $y = \sqrt{(x+5)^3}$, $0 \leq x \leq 8$.

6. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq xe^x$, $0 \leq x \leq 1$ wokół osi OX .

7. Oblicz długość łuku krzywej $y = \log(x)$, $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.

8. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $\arctan(x) \leq y \leq \sqrt{\arctan^2(x) + 1} + \sin(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$ wokół osi OX .

9. Od pomarańczy o grubej skórce odcięto końce, tak, że ukazał się miąższ. Pomarańczę następnie pokrojono w równe plastry. Pokaż, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

10. Zbadaj zbieżność całek niewłaściwych i oblicz te, które są zbieżne:

(a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}$,

(b) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$,

(c) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$,

(d) $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{x^2-1} dx$,

(e) $\int_2^\infty \frac{dx}{x \log(x)}$,

(f) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}}$,

(g) $\int_0^\infty \cos(x) dx$,

(h) $\int_1^\infty x^{\frac{1}{x}} dx$,

(i) $\int_{-\infty}^\infty e^x dx$,

(j) $\int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx$,

(k) $\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx$,

(l) $\int_2^\infty \frac{dx}{x \log^2(x)}$,

(m) $\int_0^\infty x^3 \sin(x^4) dx$.