

MATEMATYKA OBLICZENIOWA
LISTA ZADAŃ 5 - UKŁADY LINIOWE 2

28.04.2025

1. Napisz skrypt rysujący kule jednostkowe w normach $p > 0$ dla $\mathbb{R}^3$. Utwórz animację. Użyj funkcji Matlaba `getframe` i `movie`.
2. Policz normy 1, 2 i ∞ wektora

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

3. Oblicz 1 i ∞ normę następującej macierzy, a także jej stałe uwarunkowania dla tych norm:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Pokaż następujące nierówności, dla dowolnego wektora v :

(a) $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$,

(b) $\|v\|_2 \leq \|v\|_1$,

(c) $\|v\|_1 \leq n\|v\|_\infty$.

Dla każdej nierówności wskaż niezerowy wektor v , dla którego zachodzi równość.

5. Udowodnij, że dla dowolnej nieosobliwej ($\det A \neq 0$) macierzy wymiaru 2×2 stałe uwarunkowania dla normy 1 i ∞ są równe.
6. Można pokazać (zapewne było pokazane na wykładzie), że jeżeli $Ax = b$ i $A\hat{x} = \hat{b}$, to

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|b - \hat{b}\|}{\|b\|}.$$

Sprawdź, że dla pewnych niezerowych i nierównych sobie wektorów $b, \hat{b}$ będzie miała miejsce równość.

7. Napisz skrypt generujący macierz $n \times n$ A zadaną stałą uwarunkowania κ dla normy 2. Można to zrobić generując dwie dowolne macierze ortogonalne U, V oraz macierz diagonalną Σ o współczynnikach $\sigma_{ii} = \kappa^{-(i-1)/(n-1)}$. Następnie niech $A = U\Sigma V$. Dla stałych uwarunkowania $\kappa(A) = 1, 10^4, 10^8, 10^{12}, 10^{16}$ wygeneruj odpowiednią macierz, następnie losowy wektor x_{true} o długości n oraz iloczyn $b = A * x_{true}$. Następnie rozwiąż układ $Ax = b$ trzema sposobami: metodą eliminacji Gaussa, przez odwrócenie macierzy A , oraz metodą Cramera. W przypadku eliminacji Gaussa użyj Matlabowej składni $x = A \backslash b$, macierz odwrotną oblicz przy pomocy funkcji `inv(A)`, a w metodzie Cramera obliczaj wyznaczniki przy pomocy Matlabowej funkcji `det`. W każdym przypadku oblicz błąd względny (w 2 normie) $\|x - x_{true}\| / \|x_{true}\|$. Oblicz *relative residual* (w 2 normie): $\|b - Ax\| / (\|A\| \|x\|)$. Rozważ związek tych stałych z metodami i stałymi uwarunkowania.