

MATEMATYKA OBLICZENIOWA

LISTA ZADAŃ 7 - INTERPOLACJA WIELOMIANOWA I SPLINOWA

25.05.2025

Wielomian w Matlabie zapisywany jest jako wektor (poziomy) współczynników:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \sim \quad [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0]$$

Do wyliczenia wartości wielomianu w punkcie lub w wielu punktach służy funkcja `polyval`. Do interpolacji, wielomianowej czy splinowej, służą funkcje `polyfit`, `interp1` `spline`. Do rysowania wykresu służy funkcja `plot` lub `fplot`.

- Mamy na płaszczyźnie pewien zbiór punktów: $(2, 2), (3, 6), (4, 5), (5, 5), (6, 6)$.
 - ♣ narysuj te punkty na wykresie, w postaci kółeczek.
 - ♣ napisz funkcję `vandermonde`, która przyjmuje taki jak powyższy układ punktów, i zwraca współczynniki wielomianu interpolacyjnego. Narysuj wykres tego wielomianu na kółeczkach z pierwszego punktu.
 - ♣ napisz funkcję `lagrange`, która przyjmuje układ N punktów na płaszczyźnie, liczbę naturalną $k = 1, \dots, N$ oraz liczbę x , a następnie zwraca wartość k -tego wielomianu bazowego Lagrange'a w punkcie x . Jeszcze lepiej: niech x będzie wektorem, i zwracany będzie wektor wartości. Narysuj wykresy wszystkich tych wielomianów dla układu punktów podanego wyżej (wraz z narysowanymi kółkami). Użyj instrukcji `subplot`. Następnie użyj funkcji `lagrange` do narysowania wykresu wielomianu Lagrange'a.

- Poniżej podane są dane populacyjne USA:

Rok	Populacja w mln
1900	76,0
1920	105,7
1940	131,7
1960	179,3
1980	226,5
2000	281,4

- Wykreśl te dane w postaci kółeczek.
 - Wykreśl wielomian interpolacyjny dla lat 1880 – 2020, wraz z punktami interpolacyjnymi.
 - Znajdź współczynniki wielomianu Lagrange'a stopnia 2, który interpoluje lata 1900, 1920 i 1940.
 - Znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona, który interpoluje te same punkty co powyżej. Sprawdź, że jest to ten sam wielomian.
- Znajdź wielomian interpolacyjny stopnia 12 dla funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

i równo rozmieszczonych 13 węzłów w przedziale $[-5, 5]$. Wykreśl ten wielomian oraz samą funkcję na tym samym wykresie.

4. Powtórz powyższe ćwiczenie, ale dla węzłów Czebyszewa:

$$x_i = 5 \cos \frac{\pi j}{12}, \quad j = 0, 1, \dots, 12.$$

5. Dla tej samej funkcji, i równo rozmieszczonych punktów węzłowych znajdź i wykreśl interpolację kawałkami liniową.

6. Powtórz powyższe ćwiczenie dla interpolacji kawałkami 3 rzędu (cubic spline).

7. Poniższe dane mogą przedstawiać próbki jakiejś funkcji 2 zmiennych x i y , na przykład wysokość terenu:

6	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	2	0	0	0
4	0	0	2	4	2	0	0
3	1	2	4	8	4	2	2
2	0	0	2	4	2	0	0
2	0	0	2	4	2	0	0
1	0	0	0	2	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6

- Używając funkcji `spline` znajdź interpolację splinem 3 rzędu każdego wiersza. Oblicz wartość tej interpolacji w punktach przedziału $[0, 6]$, równomiernie rozmieszczonych co 0,1. Powinna powstać tablica wartości o rozmiarze 7×61 .
- Znajdź teraz interpolację splinową 3 rzędu każdej kolumny, i oblicz jej wartości znowu w równomiernie rozmieszczonych co 0,1 punktach przedziału $[0, 6]$. Powstaje macierz wartości o wymiarach 61×61 , nazwijmy ją M .
- Narysuj wykres macierzy M jako funkcji 2 zmiennych komendą `mesh(0:0.1:6,0:0.1:6,M)`.
- Alternatywnie, wykreśl tą funkcję komendami:

```
surfl(0:0.1:6,0:0.1:6,M);
colormap(copper);
shading interp;
```

- Spróbuj też komend:

```
commands;
imagesc(0:0.1:6,0:0.1:6,M);
colormap(hot);
colorbar;
```

8. Litery tak zwanych czcionek wektorowych zapisywane są tylko w postaci kluczowych punktów węzłowych. Konkretnie kształty tworzone są w czasie wyświetlania liter, przy pomocy interpolacji splinowej. Poniżej podane są punkty kluczowe pewnej litery:

t	0	1	2	3	4	5	6
x	1	2	3	2	1.2	2	2.7
y	1	0	1	2.5	3.4	4	3.2

W powyższej tabeli punkty płaszczyzny zapisywane są w postaci „parametrycznej”, bo często takie punkty mogą leżeć jeden nad drugim. Narysuj tą literę, na przykład przy pomocy poniższego kodu:

```
x = [1 2 3 2 1.2 2 2.7];
y = [1 0 1 2.5 3.4 4 3.2];
n = length(x);
t = 0:1:n-1;
tt = 0:0.01:n-1;
xx = spline(t,x,tt);
yy = spline(t,y,tt);
hold on
plot(xx,yy,'LineWidth',2);
plot(x,y,'o');
grid on;
```

✠ Narysuj następującą literę:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	3	1.75	0.9	0	0.5	1.5	3.25	4.25	4.25	3	3.75	6.00
y	4	1.60	0.5	0	1.0	0.5	0.50	2.25	4.00	4	3.25	4.25

✠ Na tym samym wykresie narysuj powyższą literę, oraz literę powiększoną.

✠ Użyj instrukcji `comet(xx,yy)`, żeby uzyskać animację.

✠ Utwórz jakąś inną, własną literę.