

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 2

13.10.2025

1. Znajdź potęgi naturalne liczby  $\mathbf{i}$ , czyli wyznacz liczby zespolone postaci  $\mathbf{i}^n$  dla wszystkich liczb naturalnych  $n$ .
2. Jakie muszą być argumenty liczb zespolonych  $z, w$ , różnych od zera, aby:  
(a) iloczyn  $zw$ ,  
(b) iloraz  $z/w$   
były rzeczywiste?
3. Udowodnij następujące własności sprzężenia liczb zespolonych:  
(a)  $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}$ ,  
(b)  $\Re(z) = (z + \bar{z})/2$ ,  $\Im(z) = (z - \bar{z})/2\mathbf{i}$ .
4. Znajdź moduły liczb zespolonych  $z = -2 - 3\mathbf{i}$  oraz  $z = 1 - \mathbf{i}$ .
5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb  $z, w \in \mathbb{C}$  mamy następujące własności:  
(a)  $|z| \geq 0$  i  $|z| = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $z = 0$ ,  
(b)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ ,  
(c)  $|z + w| \leq |z| + |w|$ ,  
(d)  $|z - w| \geq ||z| - |w||$ .
6. Naskicuj na płaszczyźnie zbiory liczb  $z \in \mathbb{C}$  spełniających nierówności:  
(a)  $|z| < 2$ , (b)  $|z + 3\mathbf{i}| < 1$ , (c)  $|z + 4 - 2\mathbf{i}| \leq 3$ .
7. Wyznacz postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych:  
(a)  $-6 + 6\mathbf{i}$ , (b)  $2\mathbf{i}$ , (c)  $1 + \mathbf{i}$ .

8. Oblicz:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}, & \text{(b)} \quad \frac{2\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}, & \text{(c)} \quad \frac{4 - 3\mathbf{i}}{4 + 3\mathbf{i}}, \\ \text{(d)} \quad \sqrt{-3 - 4\mathbf{i}}, & \text{(e)} \quad (2 + \mathbf{i}\sqrt{12})^5, & \text{(f)} \quad (1 + \cos \tfrac{1}{3}\pi + \mathbf{i} \sin \tfrac{1}{3}\pi)^6, \\ \text{(g)} \quad (1 + \mathbf{i})^{10}, & \text{(h)} \quad \left(\frac{1 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)^{26}, & \text{(i)} \quad \frac{(1 + \mathbf{i})^n}{(1 - \mathbf{i})^{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

9. Znajdź wszystkie wartości pierwiastków:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \quad \sqrt[4]{1}, & \text{(b)} \quad \sqrt[3]{-1}, & \text{(c)} \quad \sqrt[4]{1 + \mathbf{i}}, & \text{(d)} \quad \sqrt[3]{2 - 2\mathbf{i}}, \\ \text{(e)} \quad \sqrt[6]{-27}, & \text{(f)} \quad \sqrt{3 + 4\mathbf{i}}, & \text{(g)} \quad \sqrt[3]{1}, & \text{(h)} \quad \sqrt[3]{\mathbf{i}}. \end{array}$$

Pokaż ich położenie na płaszczyźnie.

10. Znajdź wszystkie pierwiastki równań:

$$\text{(a)} \quad x^5 - 1024 = 0, \quad \text{(b)} \quad x^4 - \mathbf{i} = 0, \quad \text{(c)} \quad x^4 + 4 = 0.$$

11. Udowodnij równość  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ .

12. Niech  $a, b, c \in \mathbb{C}$  będą dowolne,  $a \neq 0$  i niech  $d \in \mathbb{C}$  będzie jednym z pierwiastków  $\sqrt{b^2 - 4ac}$ . Udowodnij, że pierwiastki równania  $az^2 + bz + c = 0$  są postaci

$$z = \frac{-b \pm d}{2a}.$$