

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 3

20.10.2025

1. Wyznacz dziedziny naturalne następujących funkcji:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}, \\ \text{(c)} & f(x) = \sqrt{3x - x^3}, \\ \text{(e)} & f(x) = \log(1 - 2 \cos x), \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}, \\ \text{(d)} & f(x) = \log(x^2 - 4), \\ \text{(f)} & f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}. \end{array}$$

2. Zapisz wzorem $y = f(x)$ złożenie następujących funkcji, i wyznacz dziedzinę naturalną złożenia:

$$\text{(a)} \quad t = 2^x, \quad z = \sqrt[3]{t+1}, \quad y = z^2, \quad \text{(b)} \quad t = \sin x, \quad z = \log t, \quad y = \sqrt{1+z^2}.$$

3. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem ($[\dots]$ oznacza część całkowitą, a $\{\dots\}$ oznacza część ułamkową):

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = |x+1| + |x-1|, \\ \text{(c)} & f(x) = x^3 + 3x^2, \\ \text{(e)} & f(x) = 1 - \sin x, \\ \text{(g)} & f(x) = |\sin x|, \\ \text{(i)} & f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|, \\ \text{(k)} & f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|, \\ \text{(m)} & f(x) = \left[\frac{4}{\pi} \arctan x\right], \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & f(x) = |x-3| - 2|x+1| + 2|x| - x + 1, \\ \text{(d)} & f(x) = -x^3 + 2x - 2, \\ \text{(f)} & f(x) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \text{(h)} & f(x) = \frac{1}{\cos x}, \\ \text{(j)} & f(x) = |x^2 - 8x + 15|, \\ \text{(l)} & f(x) = \{\cos x\}, \\ \text{(n)} & f(x) = 2\{\sin x\} - \{2 \sin x\}. \end{array}$$

4. Znajdź funkcje odwrotne do:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = 1 - 3x, \\ \text{(c)} & f(x) = x^2 - 2x, \quad x \geq 1, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \neq 1, \\ \text{(d)} & f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}, \quad x \geq 0, \end{array}$$

5. Ciąg Fibonacciego określony jest rekurencyjnie w sposób następujący: $F_1 = F_2 = 1$, a następnie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Znajdź wyrazy ciągu Fibonacciego o numerach od 3 do 12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość: $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

6. Udowodnij, **korzystając jedynie z definicji**, zbieżność ciągów, znajdując ich granice:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & a_n = \frac{1}{n^2}, \\ \text{(c)} & a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \\ \text{(e)} & a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \\ \text{(d)} & a_n = \frac{n+2}{n-1}, \quad n \geq 2, \\ \text{(f)} & a_n = \frac{3n^3 - 2n^2 - 7n + 5}{4n^3 + n - 6}. \end{array}$$

7. Udowodnij, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą o rozwinięciu dziesiętnym

$$\beta, \alpha_1 \alpha_2 \dots,$$

to ciąg określony wzorem

$$a_n = \beta, \alpha_1 \dots \alpha_n$$

jest zbieżny do x (, jest punktem dziesiętnym, a $\beta \in \mathbb{Z}$).

8. Udowodnij, że granica sumy (różnicy, ilorazu) ciągów zbieżnych jest sumą (różnicą, ilorazem) ich granic. Oczywiście w przypadku ilorazu zakładamy, że ciąg w mianowniku ma wyrazy różne od zera, i że jego granica jest różna od zera.

9. Zbadaj monotoniczność następujących ciągów:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & a_n = n + \frac{1}{n}, \\ \text{(b)} & a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2, \\ \text{(c)} & a_n = \sqrt[n]{n!}, \\ \text{(d)} & a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \\ \text{(e)} & a_n = \frac{2^n}{n!}, \\ \text{(f)} & a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}. \end{array}$$

10. Oblicz granice (być może niewłaściwe) ciągów:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & a_n = \frac{7n + (\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3 + 7n + 3}, \\ \text{(b)} & a_n = \sqrt{n^2 + n} - n, \\ \text{(c)} & a_n = \frac{\sin n}{n}, \\ \text{(d)} & a_n = r^n, \quad r > 1, \\ \text{(e)} & a_n = \sqrt[n]{r}, \quad 0 < r < 1, \\ \text{(f)} & a_n = 2^n - \frac{1}{n}, \\ \text{(g)} & a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 2}, \\ \text{(h)} & a_n = \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n}, \\ \text{(i)} & a_n = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 2}}, \\ \text{(j)} & a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}, \\ \text{(k)} & a_n = \frac{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n}{3^n}, \\ \text{(l)} & a_n = \sqrt{3^n + 2^n}\sqrt{3^n + 1}, \\ \text{(m)} & a_n = \sqrt[n^2]{n}, \\ \text{(n)} & a_n = \sqrt[n]{n^2}, \\ \text{(o)} & a_n = n(\sqrt{n^2 + 7} - n), \\ \text{(p)} & a_n = \frac{n^2 + n + 1}{(n + \sin n)^2}, \\ \text{(q)} & a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 + 2} + \frac{n^2 + 3}{n^3 + 3} + \dots + \frac{n^2 + n}{n^3 + n}, \\ \text{(r)} & a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{(n + 1)^2}, \\ \text{(s)} & a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+7} - \sqrt{n}}, \\ \text{(t)} & a_n = r^n, \quad -1 < r < 1. \end{array}$$

11. Wypisz wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, i każdy z wyrazów jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right), \quad n \geq 2.$$

12. Wypisz wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, i każdy z wyrazów jest średnią geometryczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$