

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 7

17.11.2025

1. Oblicz granice:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{1 + \log x},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{-1/x} - 1},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{-1/x} - 1},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{-1/x} + 1},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}, \quad \text{pewne } a.$$

2. Sprawdź, w których punktach funkcja $f(x)$ jest ciągła a w których nieciągła ($\operatorname{sgn} x$ to znak x : dla $x > 0$ $\operatorname{sgn} x = 1$, dla $x < 0$ $\operatorname{sgn} x = -1$, a dla $x = 0$ $\operatorname{sgn} x = 0$):

$$(a) f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x),$$

$$(b) f(x) = \{x\} - (\{x\})^2,$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x & : 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & : 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & : x \geq 3, \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x & : x \neq 2 \\ \operatorname{sgn} x & : x = 2, \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1},$$

$$(f) f(x) = \operatorname{sgn}(x^3 - x),$$

$$(g) f(x) = [x] - [\sqrt[3]{x}],$$

$$(h) f(x) = x^3 \operatorname{sgn}(x),$$

$$(i) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4} + 1},$$

$$(j) f(x) = [x^2],$$

$$(k) f(x) = \{\log_2 x\},$$

$$(l) f(x) = \frac{1}{\{x\}},$$

$$(m) f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|,$$

$$(n) f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0,$$

$$(o) f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 1,$$

$$(p) f(x) = (-1)^{[x]},$$

$$(q) f(x) = \frac{x^2 - x^3}{|x - 1|}.$$

3. Określ wartość danej funkcji w 0 tak, aby była ciągła:

$$(a) f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}, \quad (b) f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}.$$

4. Oblicz granice jednostronne w 0 funkcji ($a \neq 0$):

$$(a) f(x) = \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right], \quad (b) f(x) = \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right].$$

5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja $f(x)$ jest ciągła? Naszkicuj wykres $f(x)$ dla takich a i b .

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & : x < 1 \\ x^2 & : 1 \leq x < 2 \\ ax - b & : 2 \leq x. \end{cases} \quad (b) \quad f(x) = \begin{cases} x & : x < 1 \\ x^2 + ax + b & : 1 \leq x < 2 \\ x + 3 & : 2 \leq x. \end{cases}$$