

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 14

19.01.2026

1. Zbadaj zbieżność podanych wzorami ciągów funkcyjnych, oraz zbieżność jednostajną na podanych zbiorach:

(a) $f_n(x) = \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{n}}, (-\infty, \infty),$	(b) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}, (-\infty, \infty),$
(c) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, [0, 1],$	(d) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right), [0, \pi],$
(e) $f_n(x) = \sin^n(x), (-\infty, \infty),$	(f) $f_n(x) = \frac{1}{1+x+n}, [0, \infty),$
(g) $f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}, (-\infty, \infty),$	(h) $f_n(x) = \frac{1}{nx}, (0, 1],$
(i) $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}, [-1, 1],$	(j) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, [-1, 1],$
(k) $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right), [-1, 1],$	(l) $f_n(x) = nx^{-nx^2}, [0, 1].$

2. Wyznacz zbiór, na którym zbieżny jest podany szereg funkcyjny, oraz sprawdź, czy zbieżność jest jednostajna:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nx^2},$	(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1+nx}},$	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n},$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx},$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n},$	(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}},$
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2},$	(h) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n,$	(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n},$
(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{x(1-x)})^n,$	(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$	(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right),$
(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2},$	(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx).$	

3. Udowodnij, że następujące szeregi funkcyjne są jednostajnie zbieżne na całej prostej $(-\infty, \infty)$:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!},$	(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n},$	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}.$
--	--	---

4. Udowodnij, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1+nx}}$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[0, \infty)$.

5. Udowodnij, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n x^n}$ jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie na zbiorze $(1, \infty)$, oraz że jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[2, \infty)$.

6. Znajdź pochodną f' oraz całkę nieoznaczoną $\int f(x) dx$ następujących funkcji:

$$(a) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n, \quad (b) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n,$$

$$(c) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n, \quad (d) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

7. „Zwiń” następujące szeregi potęgowe, to znaczy znajdź wzór na sumę, i określ dziedzinę tak powstałej funkcji:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n}, \quad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{2n},$$

$$(d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n, \quad (e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n, \quad (f) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2) x^n.$$