

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 2

12.10.2026

1. Znajdź potęgi naturalne liczby $\mathbf{i}$, czyli wyznacz liczby zespolone postaci $\mathbf{i}^n$ dla wszystkich liczb naturalnych n .
2. Jakie muszą być argumenty liczb zespolonych z, w , różnych od zera, aby:
(a) iloczyn zw ,
(b) iloraz z/w
były rzeczywiste?
3. Udowodnij następujące własności sprzężenia liczb zespolonych:
(a) $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}$,
(b) $\Re(z) = (z + \bar{z})/2$, $\Im(z) = (z - \bar{z})/2\mathbf{i}$.
4. Znajdź moduły liczb zespolonych $z = -2 - 3\mathbf{i}$ oraz $z = 1 - \mathbf{i}$.
5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $z, w \in \mathbb{C}$ mamy następujące własności:
(a) $|z| \geq 0$ i $|z| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $z = 0$,
(b) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
(c) $|z + w| \leq |z| + |w|$,
(d) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.
6. Naskicuj na płaszczyźnie zbiory liczb $z \in \mathbb{C}$ spełniających nierówności:
(a) $|z| < 2$, (b) $|z + 3\mathbf{i}| < 1$, (c) $|z + 4 - 2\mathbf{i}| \leq 3$.
7. Wyznacz postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych:
(a) $-6 + 6\mathbf{i}$, (b) $2\mathbf{i}$, (c) $1 + \mathbf{i}$.

8. Oblicz:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}, & \text{(b)} \quad \frac{2\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}, & \text{(c)} \quad \frac{4 - 3\mathbf{i}}{4 + 3\mathbf{i}}, \\ \text{(d)} \quad \sqrt{-3 - 4\mathbf{i}}, & \text{(e)} \quad (2 + \mathbf{i}\sqrt{12})^5, & \text{(f)} \quad (1 + \cos \tfrac{1}{3}\pi + \mathbf{i} \sin \tfrac{1}{3}\pi)^6, \\ \text{(g)} \quad (1 + \mathbf{i})^{10}, & \text{(h)} \quad \left(\frac{1 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)^{26}, & \text{(i)} \quad \frac{(1 + \mathbf{i})^n}{(1 - \mathbf{i})^{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

9. Znajdź wszystkie wartości pierwiastków:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \quad \sqrt[4]{1}, & \text{(b)} \quad \sqrt[3]{-1}, & \text{(c)} \quad \sqrt[4]{1 + \mathbf{i}}, & \text{(d)} \quad \sqrt[3]{2 - 2\mathbf{i}}, \\ \text{(e)} \quad \sqrt[6]{-27}, & \text{(f)} \quad \sqrt{3 + 4\mathbf{i}}, & \text{(g)} \quad \sqrt[3]{1}, & \text{(h)} \quad \sqrt[3]{\mathbf{i}}. \end{array}$$

Pokaż ich położenie na płaszczyźnie.

10. Znajdź wszystkie pierwiastki równań:

$$\text{(a)} \quad x^5 - 1024 = 0, \quad \text{(b)} \quad x^4 - \mathbf{i} = 0, \quad \text{(c)} \quad x^4 + 4 = 0.$$

11. Udowodnij równość $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

12. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ będą dowolne, $a \neq 0$ i niech $d \in \mathbb{C}$ będzie jednym z pierwiastków $\sqrt{b^2 - 4ac}$. Udowodnij, że pierwiastki równania $az^2 + bz + c = 0$ są postaci

$$z = \frac{-b \pm d}{2a}.$$