

www.om.edu.pl www.om.edu.pl www.om.edu.pl www.om.edu.pl www.om.edu.pl
www.wolframalpha.com www.wolframalpha.com www.wolframalpha.com www.wolframalpha.com
www.mathematische-basteleien.de/formula.htm www.mathematische-basteleien.de/formula.htm

Tablica całek Tablica pochodnych (ze wzorami)

Przykłady zabawy z Wolframem:

- nieoznaczona – <http://www.wolframalpha.com/input/?i=Integral%28cosx%29>,
 - oznaczona – <http://www.wolframalpha.com/input/?i=Integral%28x^2%2C3%2C4%29>, (Zwróćcie uwagę, że
- dziad przesuwają sobie oś Y, tak żeby mieć blisko obszar całkowania, więc obrazek jest dość mylący!...)

A tutaj sumy górne i dolne! ☺ Ruszać można i zmienną n (na suwaku) i krańcami przedziału całkowania, tylko funkcja jest na stałe, więc eksperymentatorów zapraszam tutaj. Miłej nauki/zabawy!

Rzeczy starsze (ale jare!):

Polecam poczytanie <http://www.math.uni.wroc.pl/~msliw/harmon1.jpg> i <http://www.math.uni.wroc.pl/~msliw/harmon2.jpg> (S. Kowal, „Przez rozrywkę do wiedzy”). Wybaczenie, że znów średnie, ale naprawdę samo się napatoczyło i jest też chyba całkiem fajne? A z innych (fajniejszych?) rzeczy proponuję może <http://www.matematyka.wroc.pl/kolkomatematyczne/2007-i-podzielno%C5%9B%C4%87>. (uwaga: z kropką na końcu!) Na tym portalu jest w ogóle dużo fajnych rzeczy, w tym – nieśmiało odnotuję – również co najmniej dwa artykuły O ŚREDNICH!! ☺ (<http://www.matematyka.wroc.pl/ciekawieomatematyce/brakujaca-srednia>, <http://www.matematyka.wroc.pl/ciekawieomatematyce/naturalne-srednie-arytmetycznie>)

Z1. Co jest większe: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ czy $\sqrt{10}$? $\sqrt{2}$ czy $\sqrt{(4-\sqrt{7})}$? $\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$ czy 7?

Z2. Udowodnij, że jeśli $a + 1/a$ jest liczbą wymierną, to także: $x = a^2 + 1/a^2$, $y = a^4 + 1/a^4$ i $z = a^3 + 1/a^3$.

Z3. Udowodnij, że $\sqrt[3]{40\sqrt{2}-57} - \sqrt[3]{40\sqrt{2}+57} \in \mathbf{Z}$.

Z4. Rozwiąż: $x^2 + 9 \geq 6x$, $x^2 + 9 > 4x$, $4x^2 + 1 < 4x$, $9x^2 + 4 \leq 12x$.

Z5. Wykaż, że: $\alpha)$ $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, $\beta)$ dla $a \neq 0$ $a^2 + 1/a^2 \geq 2$, $\gamma)$ $a, b \geq 0 \Rightarrow a+b \geq \sqrt{ab}$, $\delta)$ $a < b \Rightarrow a < \frac{1}{2}(a+b) < b$, $\epsilon)$ $a \neq b \Rightarrow a/b + b/a > 2$, $\zeta)$ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$, $\eta)$ $a^2+b^2+2 \geq 2(a+b)$, $\theta)$ $a, b > 0 \Rightarrow (a+b)(1/a+1/b) \geq 4$.

Z6. Rozwiąż układziki:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xz \\ y^2 + z^2 = 2yx \\ z^2 + x^2 = 2zy \end{cases}, \begin{cases} x_1^2 + 1/x_2^2 \leq 2 \\ x_2^2 + 1/x_3^2 \leq 2 \\ \dots \\ x_{10}^2 + 1/x_{11}^2 \leq 2 \\ x_{11}^2 + 1/x_1^2 \leq 2 \end{cases}.$$

Z7. Wykaż, iż $a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

Z8. (II etap XLIV OM!) Wykaż, że dla dodatnich x, y, u, v $\frac{xy + xv + uy + uv}{x + y + u + v} \geq \frac{xy}{x + y} + \frac{uv}{u + v}$.

Z9. Udowodnij odp. (prawdziwe) nierówności między średnią arytm., kwadratową i pierwiastkową.

Z10. Która liczba jest większa: $\sqrt{99} + \sqrt{101}$ czy 20? $\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$ czy 7?

- Z11. Dowiedź, że: $\alpha) a^3+b^3+c^3 = 3abc \Rightarrow a = b = c$,
 $\beta) a, b, c \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} \leq a + b + c$.
- Z12. Udowodnij, że średnia arytm./geom./harmon./inne (dowolnie wielu liczb) to rzeczywiście średnie (tj. dają wartość pomiędzy najmniejszym a największym z argumentów).
- Z13. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzą nierówności:
 $\alpha) 8x^3+y^3+27>18xy$, $\beta) 8x^3+y^3+27<15xy$, $\gamma) 8x^3+y^3+27>12xy$, $\delta) 8x^3+y^3+27>6xy$?
- Z14. Udowodnij: $\frac{3ab}{a^2+6b^2} < \frac{2c^2+3d^2}{8cd}$, $5x^3 \leq 3x^5+2$.
- Z15. Wykaż, że jeśli $abc = 1$ i $a, b, c \geq 0$, to: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$.
- Z16. Wykaż, że jeśli $a + b + c = 1$ i $a, b, c \geq 0$, to: $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$, a $1/a + 1/b + 1/c \geq 9$.
- Z17. Udowodnij, że $a^2+b^2+4 \geq 2(a+b-ab)$.
- Z18. Udowodnij, że spośród trójkątów o ustalonym obwodzie trójkąt równoboczny ma największe pole.
- Z19. Wśród prostopadłościanów, których długości wszystkich krawędzi sumują się do 12, wskaż ten, który ma największą objętość.
- Z20. Który z prostopadłościanów o ustalonej objętości ma naj...(?) sumę długości krawędzi?
- Z21. Który z prostopadłościanów o ustalonej objętości ma naj...(?) powierzchnię?
- Z22. Który z prostopadłościanów o ustalonej sumie długości krawędzi ma naj...(?) powierzchnię?
- Z23. Dokończ (w międzyczasie dowodząc!): z dwóch nieprzystających prostokątów o równych obwodach większe pole ma ten, którego różnica długości boków jest ...
- Z24. $a+b+c+d+e = 1$. Podaj jak najlepsze oszacowania wartości $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$, $abcde$ i $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$.
- Z25. $abcde=1$. Podaj jak najlepsze oszacowania wartości $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$, $a+b+c+d+e$ i $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$.
- Z26. $a+b+c=1$. Podaj jak najlepsze oszacowania wartości $ab+bc+ca$.
- Z27. $a+b+c+d=1$. Podaj jak najlepsze oszacowania wartości $ab+bc+cd+da$.
- Z28. Dla jakich pierwszych p liczby $4p^2+1$ i $6p^2+1$ są pierwsze?
- Z29. Jaka jest cyfra jedności liczby 2^{1000} ?
- Z30. Udowodnij, że $31|2^{5n+1}+4^{5n+1}-6$.
- Z31. a^2 i b^2 dają tę samą resztę przy dzieleniu przez p . Dowiedź, że p dzieli $a+b$ lub $a-b$.
- Z32.