

CAŁKA HENSTOCKA-KURZWEILA

Kazimierz Musiał

Będlewo 2012

Koło Naukowe Matematyków Teoretyków

1 Podstawowe definicje

Definicja 1.1 *Partycją w odcinku I nazywamy każdą rodzinę par $P = \{(I_1, t_1), \dots, (I_p, t_p)\}$, gdzie $I_1, \dots, I_p$ są niemal rozłącznymi odcinkami domkniętymi, których suma jest zawarta w I i $t_i \in I_i$ dla $i \leq p$. Jeśli $\bigcup_i I_i = I$, to mówimy o *partycji odcinka I* . Partycję nazwiemy *wierzchołkową*, jeśli każdy punkt t_i jest końcem lub początkiem odcinka I_i .*

Dla danej partycji $P = \{(I_1, t_1), \dots, (I_p, t_p)\}$ odcinka I i funkcji f zadanej na I wyrażenie

$$HK(f, P) = \sum_{i=1}^p f(t_i) |I_i|$$

nazwiemy sumą całkową f nad P .

Jeśli δ jest dodatnią funkcją na I , to partycję $\{(I_1, t_1), \dots, (I_p, t_p)\}$ nazywamy δ -małą, jeśli $|I_i| < \delta(t_i)$, dla każdego $i \leq p$.

Lemat 1.2 *Dla każdej dodatniej funkcji δ na odcinku I istnieje δ -mała partycja odcinka I .*

Lemat 1.3 *Jeśli δ jest funkcją dodatnią na odcinku I , to każda δ -mała partycja w I jest podzbiorem pewnej δ -małej partycji I .*

Definicja 1.4 Funkcja f zdefiniowana na odcinku I jest na tym odcinku całkowalna w sensie Henstocka-Kurzweila, jeśli istnieje liczba z o następującej

własności: dla każdej dodatniej liczby $\epsilon > 0$ istnieje zdefiniowana na I funkcja dodatnia δ taka, że

$$|HK(f, P) - z| < \epsilon$$

dla każdej δ -małej partycji P odcinka I

Można łatwo zauważyć, że liczba z jest jednoznacznie wyznaczona przez funkcję f . Nazywamy ją całką *Henstocka-Kurzeila* funkcji f na I i oznaczamy przez $(HK) \int_I f(t) dt$ lub przez $(HK) \int_a^b f(t) dt$, jeśli $I = [a, b]$.

Rodzinę wszystkich HK -całkowalnych funkcji na I oznaczamy przez $HK(I)$.

HK -całka oczywiście jest uogólnieniem całki Riemanna.

Z poniższego przykładu widać, że uogólnienie to jest istotne.

Przykład 1.5 Niech Q będzie zbiorem liczb wymiernych odcinka $[0, 1]$. Funkcja χ_Q nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest HK -całkowalna i $(HK) \int_0^1 \chi_Q(t) dt = 0$. Aby to udowodnić, wybierzmy $\epsilon > 0$ i uporządkujmy Q w ciąg $\langle r_n \rangle$. Definiujemy δ wzorem

$$\delta(t) = \begin{cases} \epsilon 2^{-n-1} & \text{jeśli } t = r_n, n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{jeśli } t \notin Q. \end{cases}$$

Jeśli teraz $P = \{(I_1, t_1), \dots, (I_p, t_p)\}$ jest δ -małą partycją $[0, 1]$, to

$$0 \leq HK(\chi_Q, P) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t_i=r_n} |I_i| < \sum_n^{\infty} 2\epsilon 2^{-n-1} = \epsilon,$$

co kończy dowód. □

Uwaga 1.6 Powyższy przykład pokazuje, że funkcja HK -całkowalna może nie być ciągła w żadnym punkcie.

Stwierdzenie 1.7 $HK(I)$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, a HK -całka jest funkcją monotoniczną.

Stwierdzenie 1.8 Jeśli $f \in HK(I)$, to $f \in HK(J)$ dla każdego odcinka $J \subseteq I$.

Stwierdzenie 1.9 Niech f będzie funkcją na $[a, b]$ i niech $c \in (a, b)$. Jeśli f jest HK -całkowalna na $[a, c]$ i na $[c, b]$, to f jest również HK -całkowalna na $[a, b]$ i

$$(HK) \int_a^b f(t) dt = (HK) \int_a^c f(t) dt + (HK) \int_c^b f(t) dt.$$

Stwierdzenie 1.10 *Niech f i g będą dwiema funkcjami zdefiniowanymi na odcinku I . Jeśli $f = g$ prawie wszędzie, to $f \in HK(I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \in HK(I)$. Ponadto*

$$(HK) \int_I f = (HK) \int_I g.$$

Dowód. Korzystając z tego, że $HK(I)$ jest przestrzenią liniową, wystarczy udowodnić, że jeśli h jest nieujemna i prawie wszędzie równa zero na I , to jest HK-całkowalna i ma całkę równą zero.

Niech więc h będzie różna od zera wyłącznie na zbiorze E miary zero i niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy zbiór E_n wzorem

$$E_n = \{t \in E : n - 1 < h(t) \leq n\}.$$

Ponieważ E_n jest zbiorem miary zero, więc można go pokryć zbiorem będącym sumą ciągu parami rozłącznych odcinków otwartych (a_j^n, b_j^n) i mającym własność

$$\sum_{j=1}^{\infty} (b_j^n - a_j^n) < \epsilon / n 2^n, \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Funkcję δ definiujemy wzorem

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [a, b] \setminus E \\ \min\{|t - a_j^n|, |t - b_j^n|\} & \text{dla } t \in E_n \cap (a_j^n, b_j^n) \end{cases}$$

Jeśli teraz $P = \{(I_1, t_1), \dots, (I_p, t_p)\}$ jest δ -małą partycją I , to

$$\begin{aligned} HK(h, P) &= \sum_{i=1}^p h(t_i) |I_i| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t_i \in E_n} h(t_i) |I_i| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{t_i \in E_n \cap (a_j^n, b_j^n)} h(t_i) |I_i| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n \sum_{t_i \in E_n \cap (a_j^n, b_j^n)} |I_i| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{j=1}^{\infty} (b_j^n - a_j^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon / 2^n = \epsilon. \end{aligned}$$

Zauważmy, że z definicji δ wynika, że $I_i \subset (a_j^n, b_j^n)$, co daje

$$\sum_{t_i \in E_n \cap (a_j^n, b_j^n)} |I_i| \leq b_j^n - a_j^n.$$

To dowodzi całkowalności funkcji h . $\square$

Pochodna funkcji całkowalnej w sensie Riemanna nie musi być całkowalna w sensie Riemanna. Całka Henstocka-Kurzweila rozwiązuje ten problem w zadowalający sposób.

Twierdzenie 1.11 *Jeśli F jest funkcją różniczkowalną na $[a, b]$, to $F' \in HK[a, b]$ i*

$$F(x) = F(a) + (HK) \int_a^x F'(t) dt$$

dla każdego $x \in [a, b]$.

Dowód. Dla ustalonego $\epsilon > 0$ i dowolnego $s \in [a, b]$ istnieje liczba $\delta(s) > 0$ o tej własności, że

$$\forall t \in [a, b] [|t - s| < \delta(s) \Rightarrow \left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - F'(s) \right| < \epsilon]$$

Niech

$$P = \{([t_0, t_1], s_1), \dots, ([t_{p-1}, t_p], s_p)\}$$

będzie δ -małą wierzchołkową partycją $[a, b]$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} & |F(t_i) - F(t_{i-1}) - F'(s_i)(t_i - t_{i-1})| = \\ & = \left| \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - F'(s_i) \right| (t_i - t_{i-1}) < \epsilon(t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned} & |HK(F', P) - [F(b) - F(a)]| = \\ & = \left| \sum_{i=1}^p F'(s_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^p [F(t_i) - F(t_{i-1})] \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^p |F'(s_i)(t_i - t_{i-1}) - [F(t_i) - F(t_{i-1})]| < \epsilon(b - a). \end{aligned}$$

To kończy dowód twierdzenia. $\square$

Przejdziemy teraz do badania własności funkcji $F(x) = (HK) \int_a^x f(t) dt$, dla funkcji f zadanej na odcinku $[a, b]$.

Twierdzenie 1.12 Niech f będzie funkcją HK-całkowalną na $[a, b]$. Niech $F(a) = 0$ i $F(x) = (HK) \int_a^x f(t) dt$, dla wszystkich $x \in (a, b]$. Wówczas F jest funkcją ciągłą na $[a, b]$.

Twierdzenie 1.13 Niech f będzie funkcją HK-całkowalną na $[a, b]$. Niech $F(a) = 0$ i $F(x) = (HK) \int_a^x f(t) dt$, dla wszystkich $x \in (a, b]$. Wówczas dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$, funkcja F jest różniczkowalna w x i $F'(x) = f(x)$. W szczególności równość ta jest spełniona w każdym punkcie ciągłości funkcji f .

Wniosek 1.14 Jeśli $f \in HK[0, 1]$, to f jest mierzalna.

Dowód. $F'(x) = \lim_n \frac{1}{n} [F(x + 1/n) - F(x)]$ p.w., więc F' jest mierzalna. Ponieważ $f = F'$ p.w., więc również f jest mierzalna. $\square$

Przykład 1.15 Przykład funkcji $f \in HK[0, 1]$, dla której $|f| \notin HK[0, 1]$.

Kładziemy

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ x^2 \sin(x^{-2}) & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$

oraz

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ 2x \sin(x^{-2}) - 2x^{-1} \cos(x^{-2}) & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$

Ponieważ $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc $f \in HK[0, 1]$ na mocy Twierdzenia 1.2. Ponieważ funkcja $h(x) = 2x \sin(x^{-2})$ jest ciągła na $[0, 1]$, więc zarówno h jak i $|h|$ są na $[0, 1]$ HK-całkowalne (bo są całkowalne w sensie Riemanna). Niech

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = 0 \\ 2x^{-1} \cos(x^{-2}) & \text{gdy } x \neq 0 \end{cases}$$

Oczywiście $g = h - f \in HK[0, 1]$. Zauważmy, że funkcja g jest w otoczeniu zera nieograniczona. Można pokazać, że $|g| \notin HK[0, 1]$.

Dokładniej, dla każdego n otrzymujemy nierówność

$$(HK) \int_0^1 |g(t)| dt \geq 2^{-5/2} \sum_{k=1}^n 1/k,$$

która dowodzi, że funkcja $|g|$ nie jest HK-całkowalna.

Ponieważ $f = h + g = F'$, więc f jest pochodną, która nie jest całkowalna w sensie Lebesgue'a.

□

Twierdzenie 1.16 *Jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna w sensie Lebesgue'a, to jest również całkowna w sensie Henstocka-Kurzweila i całki są sobie równe.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z absolutnej ciągłości całki wynika istnienie $\eta > 0$ takiej, że

$$\forall E \in \mathcal{L} \quad |E| < \eta \Rightarrow \int_E |f(t)| dt < \varepsilon/2.$$

Założmy dla uproszczenia, że $f \geq 0$ everywhere, $\alpha = (L) \int_a^b f(t) dt$, i niech

$$E_n := \left\{ t \in [a, b] : n-1 \leq \frac{3(\eta + b - a)}{\varepsilon} f(t) < n \right\}.$$

Weźmy otwarty zbiór $G_n \supset E_n$ taki, że

$$|G_n \setminus E_n| < \frac{\eta}{(n+1)2^n}$$

i połóżmy

$$\delta(t) = \inf\{|t-s| : s \notin G_n\} \quad \text{dla } t \in E_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jeśli $\mathbb{P} = \{(I_1, t_1), \dots, (I_p, t_p)\}$ jest δ -małą partycją odcinka $[a, b]$, to

$$\left| \sum_{i=1}^p f(t_i) |I_i| - \alpha \right| < \varepsilon.$$

□

Lemat 1.17 *Jeśli F jest funkcją niemalejącą na $[a, b]$, to F' jest całkowna w sensie Lebesgue'a i*

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a).$$

Dowód. F' istnieje p.w. Ponieważ F' jest nieujemna, więc całka Lebesgue'a funkcji F' istnieje; musimy tylko udowodnić, że jest skończona. Rozszerzamy F na $(b, +\infty)$, kładąc $F(t) = F(b)$, dla $t > b$. Dla każdego

$n \in \mathbb{N}$ kładziemy $f_n(t) = n[F(t+1/n) - F(t)]$. Ponieważ F_n jest niemalejąca i ograniczona, więc f_n jest całkowalna w sensie Riemanna (zbiór punktów nieciągłości f_n jest co najwyżej przeliczalny). Stąd mamy

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n(t) dt &= n \int_b^{b+1/n} F(t) dt - n \int_a^{a+1/n} F(a) dt \\ &\leq F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Ponieważ $f_n \geq 0$ p.w. i $f_n \rightarrow F'$ p.w., więc stosując lemat Fatou, otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(t) dt &= \int_a^b \liminf_n f_n(t) dt \\ &\leq \liminf_n \int_a^b f_n(t) dt \leq F(b) - F(a). \end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 1.18 *Jeśli $0 \leq f$ p.w. i $f \in HK[a, b]$, to f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a.*

Dowód. Wobec nieujemności f funkcja $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ jest niemalejąca na $[a, b]$. Na mocy Lematu 1.17 F' jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. Ale $F' = f$ p.w., więc f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. □

Twierdzenie 1.19 *Dla dowolnego odcinka I funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy, gdy f i $|f|$ są całkowalne w sensie Henstocka-Kurzweila.*

Dowód. $\Leftarrow$ Wiadomo, że $f = f^+ - f^- \in HK(I)$ i $|f| = f^+ + f^- \in HK(I)$. Ponieważ $HK(I)$ jest przestrzenią liniową, również funkcje f^+ i f^- są HK-całkowalne. Na mocy Stwierdzenia 1.18 funkcje te są całkowalne w sensie Lebesgue'a, co natychmiast daje całkowalność w sensie Lebesgue'a funkcji f . □

Literatura:

R.A. Gordon - **The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock.** Graduate Studies in Mathematics, vol. 4. AMS (1994).