Algebra 1A, lista 10.

KOnwersatorium 9.01.2017, ćwiczenia 10.01.2017.

0S. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki. Relacja stowarzyszenia. Element nierozkładalny w pierścieniu. Twierdzenie o jednoznacznym rozkładzie w pierścieniu euklidesowym. Zasadnicze twierdzenie algebry liczb zespolonych. Twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego.

1S. Wyznaczyć grupę elementów odwracalnych w następujących pierścieniach:
(a) $\mathbb{Z}$,
(b) $\mathbb{Z}[i]$,
(c) $\mathbb{Z}[X]$,
(d) $\mathbb{Z}_3[X]$,
(e) $\mathbb{Q}[X]$.

2S. Czy następujące elementy a, b są stowarzyszone w pierścieniu R ?
(a) $a = 2,\ b = 4,\ R = \mathbb{Z}$,
(b) $a = 5 + i,\ b = 1 - 5i,\ R = \mathbb{Z}[i]$,
(c) $a = 2X^2 + 2,\ b = X^2 + 1,\ R = \mathbb{Z}[X]$,
(d) $a = 2X^2 + 2,\ b = X^2 + 1,\ R = \mathbb{Z}_3[X]$.

3K. Wskazać nierozkładalny wielomian:
(a) stopnia 2 nad $\mathbb{Z}_5$,
(b) stopnia 3 nad $\mathbb{Z}_7$,
(c) stopnia 4 nad $\mathbb{Z}_2$.

4. (a) Załóżmy, że $W(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ są względnie pierwsze, niezerowe. Udowodnić, że istnieją wielomiany $S(X), T(X) \in \mathbb{R}[X]$ takie, że w ciele $\mathbb{R}(X)$ mamy:

$$\frac{1}{W(X) \cdot V(X)} = \frac{S(X)}{W(X)} + \frac{T(X)}{V(X)}.$$

(b)* Udowodnić, że każdą funkcję wymierną $f(X) \in \mathbb{R}(X)$ można przedstawić jako sumę ułamków postaci $\frac{V(X)}{W(X)}$, gdzie $V, W \in \mathbb{R}[X]$ oraz $W(X)$ jest potęgą nierozkładalnego wielomianu stopnia ≤ 2. (uwaga: dzięki temu umiemy całkować funkcje wymierne).

5.K (a) Zaznaczyć na płaszczyźnie Gaussa wszystkie liczby $z \in \mathbb{Z}[i]$ takie, że $\delta(z) \leq 10$. Ile ich jest ?

(b) Które z liczb $1, 2, 3, 4, 5, 1 + i, 2 + i, 3 + i, 4 + i, 5 + i$ są nierozkładalne w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$? (wskazówka: skorzystać z tego, że jesli $x = ab$, to $\delta(x) = \delta(a)\delta(b)$).

6. Rozważamy pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, podpierścień ciała liczb rzeczywistych.
(a) Udowodnić, że dla $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ przedstawienie x w postaci $a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}$, jest jednoznaczne.
(b) Funkcja $d : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{N}$ dana jest wzorem $d(a + b\sqrt{2}) = |a - 2b^2|$. Udowodnić, że dla $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $d(xy) = d(x)d(y)$.
(c) Wyznaczyć grupę elementów odwracalnych pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
(d) Znaleźć rozkład liczby 2 na iloczyn czynników nierozkładalnych w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

W dalszych zadaniach z tej listy R jest pierścieniem euklidesowym.

7. Załóżmy, że $p \in R \setminus R^*$ jest nierozkładalny oraz $u \in R^*$. Udowodnić, że $q = up$ też jest nierozkładalny.

8. (a) Załóżmy, że $x, y \in R$ oraz $a, b \in R$ sa oba najmniejszymi wspólnymi wielokrotnościami x, y. Udowodnić, że $a \sim b$ (tzn. a, b są stowarzyszone) oraz każdy element stowarzyszony z a jest również $NWW(x, y)$

(b) To samo, co w (a), lecz z NWD zamiast NWW.

9. Załóżmy, że $p, q \in \mathbb{Z}$ są różnymi liczbami pierwszymi, $x = p^2q^5,\ y = p^3q^4$.

(a) Udowodnić, że liczba $z = p^2q^4$ jest $NWD(x, y)$

(b) Udowodnić, że liczba $t = p^3q^5$ jest $NWW(x, y)$.

(c) Zauważyć, że $xy = NWD(x, y)NWW(x, y)$. Uogólnić ten wynik na przypadek dowolnych liczb całkowitych dodatnich.

10*. Uogólnić zadanie 8 dla dowolnego euklidesowego R. Zastąpić "różne liczby pierwsze" przez "niestowarzyszone elementy nierozkładalne".

11. Załóżmy, że $a, b, c \in \mathbb{Q}$ i $a+b\sqrt{c}$ jest niewymiernym pierwiastkiem wielomianu $W(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Udowodnić, że $a - b\sqrt{c}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu oraz wielomian $X^2 - 2aX + (a^2 - b^2c)$ dzieli wielomian $W(X)$ w pierścieniu $\mathbb{Q}[X]$. (wsk: wzorować się na dowodzie twierdzenia z wykładu).