Algebra 1A, lista 11.

Konwersatorium 16.01.2017, ćwiczenia 17.01.2017.

0S. Materiał teoretyczny: Twierdzenie o pierwiastach wymiernych wielomianu. Lemat Gaussa. Kryterium Eisensteina. Chińskie twierdzenie o resztach. Ideał w pierścieniu R. Ideał główny. Ideał generowany przez skończenie wiele elementów. Pierścień euklidesowy jest dziedziną ideałów głównych. Pierścień ilorazowy (definicja).

1S. Udowodnić, że następujące liczby rzeczywiste są niewymierne, odwołując się do twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu (wzorując się na przykładzie z wykładu). $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{25}$, $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$.

2. Rozłożyć podane wielomiany na czynniki nierozkładalne w podanych pierścieniach.

(a) $X^5 - 1$ w $\mathbb{Q}[X]$
(b) $X^5 + 1$ w $\mathbb{Z}_2[X]$
(c) $X^4 + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$
(d) $2X^3 + X^2 + 4X + 2$ w $\mathbb{Q}[X]$
(e) $2X^3 + X^2 + 4X + 2$ w $\mathbb{C}[X]$
(f) $X^4 - 9X + 3$ w $\mathbb{Q}[X]$
(g) $X^3 - 4X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$
(h) $X^8 - 16$ w $\mathbb{C}[X]$
(i) $X^8 - 16$ w $\mathbb{R}[X]$
(j) $X^8 - 16$ w $\mathbb{Q}[X]$
(k) $X^8 - 16$ w $\mathbb{Z}_{17}[X]$

3. Czy dane wielomiany są nierozkładalne w podanym pierścieniu ?

(a) $X^3 + X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$
(b) $3X^8 - 4X^6 + 8X^5 - 10X + 6$ w $\mathbb{Q}[X]$
(c) $X^4 + X^2 - 6$ w $\mathbb{Q}[X]$
(d) $4X^3 + 3X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$
(e) $X^5 + 15$ w $\mathbb{Q}[X]$
(f) $X^4 - 2X^3 + X^2 + 1$ w $\mathbb{R}[X]$

4K. Rozwiązać w $\mathbb{Z}$ następujące układy kongruencji:

(a) $x \equiv 5(mod\ 7)$ i $x \equiv 4(mod\ 6)$
(b) $x \equiv 41(mod\ 65)$ i $x \equiv 35(mod\ 72)$

5. Wyznacznik $\begin{vmatrix} 676 & 117 & 522 \\ 375 & 65 & 290 \\ 825 & 143 & 639 \end{vmatrix}$ jest dodatni i mniejszy od 100. Obliczyć ten wyznacznik bez pomocy kalkulatora. Wsk: obliczyc wartość wyznacznika modulo 10 i modulo 11, a następnie użyć chińskiego twierdzenia o resztach.

6K. W następujących pierścieniach wyznaczyć wszystkie ideały.

(a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
(b) $\mathbb{Z}_{18}$
(c) $\mathbb{Q}$
(d) $\mathbb{Z}_7$

(e) $\mathbb{C}[X]$

(f) $\mathbb{Z}[i]$.

7. Załóżmy, że I, J są ideałami w pierścieniu R. Udowodnić, że $I \cap J$ oraz $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}$ też są ideałami w R. Podać przykład, gdzie $I \cup J$ nie jest ideałem w R.

8. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych.

(a) $(2) \cap (3)$ w $\mathbb{Z}$

(b) $(12) \cap (18)$ w $\mathbb{Z}$

(c) $(X^2 - 1) \cap (X + 1)$ w $\mathbb{Q}[X]$.

Zauważyć ogólną prawidłowość.

9. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych.

(a) $(2) + (3)$ w $\mathbb{Z}$

(b) $(9) + (12)$ w $\mathbb{Z}$

(c) $(X^2 + X + 1) + (X^2 + 1)$ w $\mathbb{Z}_2[X]$.

Zauważyć ogólną prawidłowość.