Algebra 1A, lista 12.

Konwersatorium 23.01.2017.

0S. Materiał teoretyczny: Pierścień ilorazowy (obliczenia w nim). Jądro $Ker(f)$ i obraz $Im(f)$ homomorfizmu pierścieni, własności. Zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie pierścieni, zastosowania do opisu pierścieni ilorazowych. Opis pierścienia ilorazowego $F[X]/I$, gdzie $I = (W(X))$, postać normalna elementów tego pierścienia. Charakteryzacja ideałów I w pierścieniu euklidesowym R, dla których pierścień ilorazowy R/I jest ciałem. Przykłady pierścieni ilorazowych będących ciałami. Ciało 4-elementowe, ciało 27-elementowe.

1S. W następujących pierścieniach ilorazowych sporządzić tabelki dodawania i mnożenia. Znaleźć wszystkie dzielniki zera w tych pierścieniach.

(a) $\mathbb{Z}_6/(3)$

(b)* $\mathbb{Z}[X]/(X^3 + 1)$

(c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3/((1, 2))$

(d)* $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 2X + 2)$

2K. Obliczyć sumę i iloczyn danych elementów w podanych pierścieniach ilorazowych, w postaci normalnej.

(a) $3X + 4 + I$ i $5X - 2 + I$ w $\mathbb{Q}[X]/I,\ I = (X^2 - 7)$

(b) $X^2 + 3X + 1 + I$ i $-2X^2 + 4 + I$ w $\mathbb{Q}[X]/I,\ I = (X^3 + 2)$

(c) $X^2 + 1 + I$ i $X + 1 + I$ w $\mathbb{Z}_2[X]/I,\ I = (X^3 + X + 1)$

(d) $aX + b + I$ i $cX + d + I$ w $\mathbb{R}[X]/I,\ I = (X^2 + 1),\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$

3K. Udowodnić istnienie poniższych izomorfizmów. Wsk: w każdym przypadku znaleźć epimorfizm pierścieni, którego jądrem jest odpowiedni ideał i zastosować zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie pierścieni. Np. w (a): $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C},\ f(W(X)) = W(i\sqrt{5})$.

(a) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 5) \cong \mathbb{C}$

(b) $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{Z}[i]$

(c) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 7) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{7}) = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$

(d) $\mathbb{Z}[X]/(2X - 1) \cong \{a/b \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z},\ b = 2^r$ dla pewnego $r \geq 0\}$

(e) $\mathbb{Z}_{14}/(7) \cong \mathbb{Z}_7$

(f) $\mathbb{Z}_{14}/(2) \cong \mathbb{Z}_2$

(g) $\mathbb{R}[X, Y]/(X + Y) \cong \mathbb{R}[Y]$.

4K. W następujących ciałach F znaleźć element odwrotny do elementu $a = (X + 1) + I$, w postaci normalnej.

(a) $F = \mathbb{Q}[X]/I,\ I = (X^3 - 3)$.

(b) $F = \mathbb{Z}_3[X]/I,\ I = (X^3 + 2X + 1)$.