Algebra 1A, lista 13.

Konwersatorium 30.01.2017, ćwiczenia 31.01.2017 (bez kartkówki)

0S. Materiał teoretyczny: Charakterystyka ciała: definicja, własności, przykłady. Podciało, własności. Równania algebraiczne w ciele F, znajdowanie rozwiązań w rozszerzeniu F' ciała F. Ciało algebraicznie domknięte: definicja, istnienie (informacyjnie), nieskończoność.

Ciała proste. Podciało proste ciała F. Liczba elementów ciała skończonego. Charakteryzacja ideałów $I \lhd R$ takich, że R/I jest ciałem. Ideał maksymalny. Funkcja Frobeniusa w ciele charakterystyki p. Każdy homomorfizm ciał jest monomorfizmem.

1K. Które z podanych pierścieni są ciałami ?

(a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

(b) $\mathbb{Z}_4$,

(c) $\mathbb{Z}_{17}$,

(d) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

(e) $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 3)$,

(f) $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$

(g) $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2 + 1)$,

(h) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 7)$,

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{11}) = \{a + b11^{\frac{1}{4}} + c11^{\frac{2}{4}} + d11^{\frac{3}{4}} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$

(j) $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $n > 1$.

2S. Sporządzić tabelki działań ciała:

(a) 4-elementowego,

(b) 9-elementowego.

3K. Załóżmy, że F jest ciałem, $n > 0$ i $char(F)$ nie dzieli n. Udowodnić, że:

(a) w ciele F: $n \cdot 1 \neq 0$,

(b) dla każdego $\in F$ istnieje jedyne $y \in F$ takie, że $n \cdot y = x$.

4K. Rozwiązać równanie kwadratowe $x^2 + x + 1 = 0$

(a) w ciele $\mathbb{Z}_7$,

(b) w ciele $\mathbb{Z}_5$,

(c) w ciele liczb rzeczywistych,

(d) w ciele liczb zespolonych.

5K. Traktujemy ciało $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$.

(a) Udowodnić, że układ liczb $1, \sqrt{2}$ jest bazą tej przestrzeni liniowej.

(b) Funkcja $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ dana jest wzorem $f(x) = (1+\sqrt{2})x$. Sprawdzić, że f jest przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nad ciałem $\mathbb{Q}$, a następnie obliczyć macierz f w bazie $1, \sqrt{2}$.

6. Traktujemy ciało $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$.

(a) Udowodnić, że wymiar tej przestrzeni liniowej jest nieskończony.

(b)* Udowodnić, że ten wymiar jest nieprzeliczalny.

(c)* Udowodnić, że ten wymiar jest równy $2^{\aleph_0}$.

7. Załóżmy, że F jest ciałem zaś $I \lhd F$ ideałem w pierścieniu F. Udowodnić, że $I = \{0\}$ lub $I = F$.

8. Załóżmy, że $f : F_1 \to F_2$ jest homomorfizmem ciał. Udowodnić, że f jest monomorfizmem.

9. Załóżmy, że pierścień R jest przemienny, z jednością, niezerowy oraz $I \triangleleft R$ jest właściwy. Mówimy, że I jest pierwszy, gdy dla wszystkich $a, b \in R$, $a \cdot b \in I$ pociąga, że $a \in I$ lub $b \in I$. Udowodnic, że

(a) I jest pierwszy $\iff$ R/I jest dziedziną,

(b) jeśli I jest maksymalny, to I jest pierwszy.

10. Załóżmy, że $f : R \to S$ jest homomorfizmem pierścieni przemiennych. Udowodnić, że:

(a) Jeśli $I \triangleleft S$, to $f^{-1}[I] \triangleleft R$.

(b) Jeśli $I \triangleleft R$ i f jest "na", to $f[I] \triangleleft S$.