Algebra 1A, lista 1.

Konwersatorium 10.10.2016 (2 godziny), Ćwiczenia 11.10.2016.

Oznaczenia zadań i ich części: S: do samodzielnego wykonania, K: do omówienia na konwersatorium, *: zadania trudniejsze (nieobowiązkowe). Na 1. kartkówce obowiązują zadania z bieżącej listy oznaczone literą S oraz zadania z bieżącej listy oznaczone literą K, omówione wcześniej na konwersatorium. Ponadto obowiązuje materiał teoretyczny z zadania 0S. N akolejnych kartkówkach dodatkowo obowiązują zadania z poprzedniej listy, nieoznaczone literą K,S i gwiazdką.

0S. Materiał teoretyczny (definicje, twierdzenia, przykłady): działanie w zbiorze, łączność, przemienność, element neutralny. Struktura algebraiczna, izomorfizm struktur algebraicznych, indukowanie struktury.

1S. W każdym z podpunktów rozstrzygnąć, czy dane działanie w zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny.

(a) $m * n = m^n$, $A = \mathbb{N}_+$ (zbiór dodatnich liczb naturalnych).

(b) $a * b = \frac{a+b}{2}$, $A = \mathbb{Q}$.

(c) $P * Q =$ środek odcinka o końcach P, Q, $A =$ zbiór punktów płaszczyzny.

(d) $x * y = x + y + 2$, $A = \mathbb{R}$.

(e) $x * y = \min(x, y)$, $A = \mathbb{N}$.

(f) $x * y = \max(x, y)$, $A = \mathbb{N}$.

(g) $x * y = x$, $A = \mathbb{R}$.

(h) $x * y = (x \triangle y)^c$, $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Tu $\triangle$ oznacza działanie różnicy symetrycznej.

2K. (a)S Napisać tabelki działania i mnożenia modulo 6: $+_6, \cdot_6$ w zbiorze $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b)K W każdym z poniższych podpunktów wyznaczyć najmniejszy podzbiór B zbioru A taki, że:

(i) $2 \in B$ oraz B jest zamknięty na działanie $+_6$,

(ii) $2 \in B$ oraz B jest zamknięty na działanie $\cdot_6$,

(iii) $1 \in B$ oraz B jest zamknięty na działanie $+_6$,

(iv) $2 \in B$, $3 \in B$ i B jest zamknięty na działanie $+_6$.

(b)K Dana jest bijekcja $f : A \to A$ o następujących wartościach: $f(0) = 3$, $f(1) = 5$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, $f(5) = 4$. Niech $*$ będzie działaniem indukowanym w zbiorze A przez działanie $+_6$ poprzez funkcję f, zaś $\circ$ działaniem indukowanym w zbiorze A przez działanie $\cdot_6$ poprzez funkcję f. Sporządzić tabelki tych działań.

3K. (a) Wyznaczyć najmniejszy zbior $A \subseteq \mathbb{Z}$, który jest zamknięty względem dodawania i odejmowania oraz:

(a) $3 \in A$.

(b) $1 \in A$.

(c) $3 \in A$ i $5 \in A$.

4K. Przypomnieć sobie, co to jest postać algebraiczna i trygonometryczna liczby zespolonej oraz definicje dodawania i mnożenia liczb zespolonych. Dla $r > 0$ niech $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

(a) Narysować na płaszczyźnie Gaussa zbiór K_r.

(b) Dla których $r > 0$ mnożenie liczb zespolonych jest działaniem w zbiorze K_r ?

5K. Załóżmy, że $f : A \to B$ i $g : B \to C$ są izomorfizmami struktur $(A, \circ), (B, *)$ i $(C, \oplus)$ odpowiednio.

(a) Udowodnić, że funkcja odwrotna $f^{-1} : B \to A$ jest izomorfizmem struktur $(B, *)$ i $(A, \circ)$.

(b) Udowodnić, że złożenie $h = g \circ f$ jest izomorfizmem struktur $(A, \circ)$ i $(C, \oplus)$.

6. Udowodnić (wzorując się na dowodzie z wykładu), że działanie $\cdot_4$ (mnożenie modulo 4) w zbiorze $\mathbb{Z}$ jest łączne.

7. Załóżmy, że $f : A \to B$ jest izomorfizmem struktur $(A, \circ)$ i $(B, *)$.

(a) Udowodnić (wzorując się na dowodzie z wykładu), że jeśli $\circ$ jest przemienne, to $*$ jest przemienne.

(b) Udowodnić, że jeśli $\circ$ ma element neutralny w A, to $*$ ma element neutralny w B.

8. Wskazać izomorfizm struktur $\mathbb{N}_2 = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\mathbb{N}_3 = \{3^n : n \in \mathbb{N}\}$, z działaniem zwykłego mnożenia liczb.

9. W każdym z poniższych przypadków określić działanie $\circ$ w zbiorze $\mathbb{R}$ tak, by funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ była izomorfizmem struktur $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{R}, \circ)$.

(a) $f(x) = x + 2$, (b) $f(x) = 3 - x$, (c) $f(x) = x^3 + 1$.

10. Załóżmy, że $\circ$ jest działaniem łącznym w skończonym zbiorze A. Udowodnić, że istnieje $a \in A$ takie, że $a \circ a = a$ (wsk: dla danego elementu $a \in A$ rozważyć elementy $a^{2^k}, k = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie a^l oznacza $\underbrace{a \circ \ldots \circ a}_{l \text{razy}}$).

11*. W zbiorze A określone jest działanie $*$ takie, że dla dowolnych $a, b \in A$ mamy:

$$(a * b) * b = a \text{ raz } b * (b * a) = a.$$

Udowodnić, że:

(a) $(b * a) * b = a,\ b * (a * b) = a.$

(b) $*$ jest przemienne.