Algebra 1A, lista 2.

Konwersatorium 17.10.2016, ćwiczenia 18.10.2016.

0S. Materiał teoretyczny: Pojęcie podstruktury. Pojęcie grupy, podgrupy, podstawowe własności. Notacja multyplikatywna i addytywna. Przykłady grup. Grupy izometrii własnych prostokąta i trójkąta równobocznego, grupa czwórkowa Kleina K_4. Grupy permutacji. Składanie permutacji i permutacje odwrotne. Izomorfizm grupy izometrii własnych trójkąta równobocznego i S_3. Suwak logarytmiczny - zasada działania.

1. W których z następujących przypadków wzór na $x \circ y$ określa działanie grupowe w zbiorze G ? Które z tych grup są abelowe ?

(a)K $G = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $x \circ y = NWD(x, y)$ (tzn. największy wspólny dzielnik x i y).

(b)S $G = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, $x \circ y = x + y$.

(c)S $G = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$, $x \circ y = x \cdot y$.

(d)S $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $x \circ y = x + y$.

(e)S $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $x \circ y = x \cdot y$.

(f)S $G = \{a/b \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \text{ nieparzyste}\}$, $x \circ y = x + y$.

(g)K $G_r = \{kr : k \in \mathbb{Z}\}$ (gdzie $r \in \mathbb{R}$), $x \circ y = x \cdot y$.

(h)K $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \circ y = xy$, gdy $x > 0$ oraz $x \circ y = x/y$, gdy $x < 0$.

(i)K $G = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y$, gdy x jest parzyste, oraz $x \circ y = x - y$, gdy x jest nieparzyste.

2K. Załóżmy, że $f : A \to B$ jest izomorfizmem struktur $(A, *)$ i $(B, \circ)$. Udowodnić, że jeśli $(A, *)$ jest grupą, to $(B, \circ)$ też jest grupą.

3. Dowieść, że w dowolnej grupie $(G, \cdot)$,

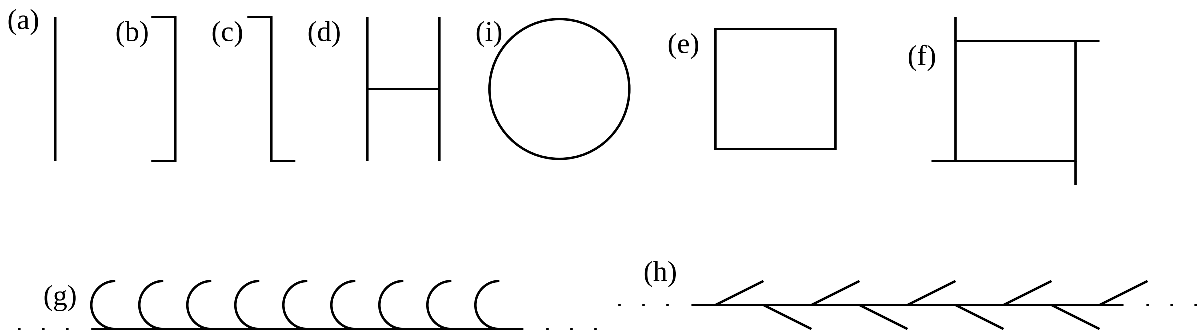
(a) $(abcd)^{-1} = d^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}$.

(b) $(a^{-1}ba)^k = a^{-1}b^k a$, k: dowolna liczba całkowita.

4. Załóżmy, że w grupie G, $a^2 = e$ dla wszystkich $a \in G$. Udowodnić, że G jest abelowa.

5. Udowodnić, że grupa G jest abelowa $\iff$ $(ab)^2 = a^2b^2$ dla wszystkich $a, b \in G$.

6. Wyznaczyć grupy izometrii własnych następujących figur płaskich. Które z tych grup są izomorficzne ? abelowe ?



7S. Sporządzić papierowy model suwaka logarytmicznego: na dwóch paskach papieru zaznaczyć skalę logarytmiczną.

8. (a) Wskazać 5 różnych izomorfizmów między grupą izometrii własnych trójkąta równobocznego i grupą permutacji S_3.

(b)* Ile jest takich izomorfizmów?