Algebra 1A, lista 4.

Konwersatorium 7.11.2016, ćwiczenia 8.11.2016.

0S. Materiał teoretyczny : Warstwy lewo- i prawostronne podgrupy K grupy G. Własności warstw. Indeks podgrupy K w grupie G. Twierdzenie Lagrange'a i wnioski z niego. Małe twierdzenie Fermata. Twierdzenie Wilsona. Homo-, epi-, mono-, endo- i automorfizmy struktur: definicja, przykłady. Własności homomorfizmów grup. Jądro i obraz homomorfizmu grup. Charakteryzacja monomorfizmu grup przy pomocy jądra. Dzielnik normalny (podgrupa normalna). Grupa ilorazowa, homomorfizm ilorazowy i zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie grup.

1. S Wyznaczyć wszystkie możliwe rzędy elementów $g \in S_7$.

2. S Załóżmy, że $g \in G$, $ord(g) = 10$. Wyznaczyć $ord(g^2), ord(g^5), ord(g^3)$.

3. Załóżmy, że $g \in G$, $ord(g) = n > 1$ oraz $k > 1$. Niech $r = r_n(k)$.

(a) Udowodnić, że $g^k = g^r$.

(b) Udowodnić, że $ord(g^k) = l$, gdzie l jest najmniejszą liczbą ≥ 1 taką, że $n|kl$.

(c) Udowodnić, że $ord(g^k) = n \iff NWD(k, n) = 1$ (tzn. gdy k i n sa względnie pierwsze).

4. Załóżmy, że G jest grupa skończoną oraz H jest niepustym podzbiorem G zamkniętym względem działania z grupy G.

(a) Udowodnić, że $e_G \in H$.

(b) Udowodnić, że dla każdego $g \in H$, $g^{-1} \in H$.

Wywnioskować stąd, że H jest podgrupą grupy G.

5. Załóżmy, że $a, b \in G$, $a \neq e$ oraz $a^4b = ba^5$. Udowodnić, że $ab \neq ba$.

6. (a) Wyznaczyć wszystkie podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$.

(b) Następnie sprawdzić, że wszystkie grupy ilorazowe grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$ są cykliczne.

7. Załóżmy, że G jest generowana przez zbiór $A = \{g, h\} \subseteq G$ taki, że $ord(g) = 5$, $ord(h) = 4$ oraz $gh = hg^2$.

(a) Niech $K = \langle a \rangle$, $H = \langle h \rangle$. Udowodnić, że $K \cap H = \{e\}$.

(b) Udowodnić, że każdy element grupy G jest postaci $g^i h^j$ dla pewnych $0 \leq i < 5$ oraz $0 \leq j < 4$ oraz, że to przedstawienie jest jednoznaczne. Ile elementów ma grupa G ?

(c) Sporządzić tabelkę działania grupy G.

8S. Obliczyć następujące reszty z dzielenia:

$r_{13}(125^{342})$, $r_{29}(321^{485})$, $r_{31}(321^{485})$.

9K. Załóżmy, że $f : G \to H$ jest homomorfizmem grup oraz $a \in G$. Załóżmy, że $ord(a) = n$ jest skończony. Udowodnic, że $ord(f(a))$ też jest skończony i dzieli $ord(a)$.

10K. Czy istnieją homomorfizmy grup $f : G \to H$, gdzie:

(a) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Q}, +)$, $f(1) = 7$

(b) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Q}, +)$, $f(1) = -1$

(c) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Q}, +)$, $f(1) = -7$

(d) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$, $f(2) = 7$ (wsk: czemu musi być wtedy równe $f(1)$?)

(e) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Z}, +),\ f(1) = 1$ (wsk: czemu musi być równe $f(\frac{1}{2})$?)
(f) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{R}^*, \cdot),\ f(1) = 5$
(g) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{R}^*, \cdot),\ f(1) = -1$
(h) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +),\ f(1) = 2$
(i) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Q}^*, \cdot),\ f(1) = 2$
(j) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Q}^*, \cdot),\ f(2) = 1$
(k) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4),\ H = (\mathbb{Z}_5, +_5),\ f(1) = 1$
(l) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4),\ H = (\mathbb{Z}, +),\ f(1) = 1$
(m) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4),\ H = (\mathbb{Z}_2, +_2),\ f(1) = 1$
11. Załóżmy, że $H < G$ oraz $[G : H] = 2$. udowodnić, że $H \triangleleft G$.