Algebra 1A, lista 5.

Konwersatorium 14.11.2016 i 21.11.2016.

0S. Materiał teoretyczny : Twierdzenie Cayleya o reprezentacji grupy. Dalsze przykłady grup: grupy dihedralne $D_n, n \geq 2$, grupa ósemkowa kwaternionów Q_8, grupa zespolonych pierwiastków z jedności i jej podgrupy. Produkt grup: definicja, własności, przykłady. Definicja i twierdzenie o produkcie wewnętrznym podgrup grupy G: przypadek dwóch podgrup, przypadek k podgrup. Skończone grupy abelowe jako produkty grup cyklicznych: rozpoznawanie ich izomorficzności.

1. (K) Załóżmy, że G, H są grupami, $a \in G$, $b \in H$ oraz grupa G jest cykliczna.
(a) Załóżmy, że G jest skończona, generowana przez a oraz $ord(b)$ dzieli $ord(a)$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $f : G \to H$ taki, że $f(a) = b$.
(b) Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm $f : (\mathbb{Z}, +) \to H$ taki, że $f(1) = b$.
(c) Załóżmy, że G jest nieskończona, generowana przez a. Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $f : G \to H$ taki, że $f(a) = b$.

2.S Wyznaczyć wszystkie homomorfizmy $f : G \to H$, gdzie:
(a) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$.
(b) $G = (\mathbb{Z}_3, +_3)$, $H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$.
(c) $G = (\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$, $H = (\mathbb{Z}_6, +_6)$.

3. Załóżmy, że G i H są grupami, $g \in G, h \in H$.
(a)S Załóżmy, że $ord(g) = 3, ord(h) = 5$. Udowodnić, że w produkcie $G \times H$ $ord(\langle g, h\rangle) = 15$.
(b)K Ogólniej, gdy $ord(g) = n, ord(h) = m$, udowodnić, że $ord(\langle g, h\rangle) = NWW(n, m)$.

4K. Czy następujące grupy są cykliczne ?
(a) $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$,
(b) $(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_3, +_3)$,
(c) $(\mathbb{Z}_6, +_6) \times (\mathbb{Z}_6, +_6)$,
(d) $(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_4, +_4)$,
(e) $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}_2, +_2)$.
(wsk: zbadać rzędy elementów tych grup)

5K. Wypisać wszystkie grupy abelowe rzędu 12 (z dokładnością do izomorfizmu, bez powtórzeń).

6K. Wiemy, że grupy $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ i $\mathbb{Z}_{15}$ są cykliczne, rzędu 15, więc izomorficzne. Przedstawić grupę $\mathbb{Z}_{15}$ jako produkt wewnętrzny podgrup cyklicznych rzędu 3 i 5.

7S. Wyznaczyć wszystkie elementy postaci x^2
(a) w grupie kwaternionów Q_8,
(b) w grupie S_3,
(c) w grupie S_4.
Czy tworzą one podgrupę? Czy jest to podgrupa normalna?

8. K Czy $G \cong H$, gdzie:
(a) $G = (\mathbb{Z}_{60}, +_{60})$, $H = (\mathbb{Z}_{10}, +_{10}) \times (\mathbb{Z}_6, +_6)$.
(b) $G = (\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \triangle)$, $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(c) $G = D_6,\ H = A_4$. (wsk: zbadać wszędzie rzędy elementów, abelowość).

9. K $f : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}, +)$ dana jest wzorem $f(x, y) = 2x + 3y$. f jest epimorfizmem grup (a nawet przestrzeni liniowych). Znaleźć $Ker(f)$. Wskazać podgrupę $H < (\mathbb{R}^2, +)$ taką, że $(\mathbb{R}^2, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $Ker(f)$ i H. W szczególności, $(\mathbb{R}^2, +) \cong Ker(f) \times H$.

10. K Niech $D = \{\langle k, k\rangle : k \in \mathbb{Z}\}$. Jest to podgrupa grupy $G = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$.

(a) Wskazać epimorfizm $f : G \to (\mathbb{Z}, +)$ taki, że $Ker(f) = D$.

(b) Wskazać podgrupę $H < G$ taką, że G jest produktem wewnętrznym podgrup D i H.

(c) Udowodnić, że grupa ilorazowa G/D jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}, +)$.

11. K (a) Czy istnieje podgrupa $H < (\mathbb{Q}, +)$ taka, że $(\mathbb{Q}, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $\mathbb{Z}$ i H ?

(b) Czy istnieje podgrupa $H < (\mathbb{Z}, +)$ taka, że $(\mathbb{Z}, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $3\mathbb{Z}$ i H ?

(c) Czy grupa kwaternionów Q_8 jest produktem wewnętrznym jakichś swoich podgrup właściwych K, H?

(d)* Czy istnieje podgrupa $H < (\mathbb{R}, +)$ taka, że $(\mathbb{R}, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $\mathbb{Q}$ i H ?

12. K W grupie ilorazowej G/H wyznaczyć rząd elementu $a + H$, gdzie:

(a) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Z}, +),\ a = \frac{2}{3}$,

(b) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (3\mathbb{Z}, +),\ a = \frac{2}{3}$,

(c) $G = (\mathbb{Z}_{12}, +_{12}),\ H = \{0, 3, 9\},\ a = 5$,

(d) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +),\ a = \sqrt{2}$.

13. K Określić epimorfizm f z grupy $(\mathbb{R}, +)$ na grupę S liczb zespolonych modułu 1, taki że $Ker(f) = \mathbb{Z}$. Wywnioskować stąd, że $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z} \cong S$. (wsk: przypomnieć sobie epimorfizm $f(x) = \cos(x) + i \sin(x)$ z $\mathbb{R}$ na S z wykładu. Jakie jest jego jądro? Jak poprawić f, by jądrem stała się grupa $\mathbb{Z}$?)