Algebra 1A, lista 6.

Konwersatorium 28.11.2016, ćwiczenia 29.11.2016.
Na kartkówce 29.11 obowiązuje: lista 5 oraz zadania oznaczone literami S lub K z listy 6.

0S. Materiał teoretyczny: Opis grup małych rzędów (do rzędu 8 włącznie). Automorfizmy grup. Automorfizmy wewnętrzne grup. Grupa $Aut(G)$ automorfizmów grupy G. Centrum grupy $Z(G)$: definicja, własności. Grupa Inn(G) automorfizmów wewnętrznych grupy G, związek z centrum grupy $Z(G)$. Relacja sprzężenia w grupie G. Opis relacji sprzężenia w przypadku grup permutacji.

1K. Czy istnieje monomorfizm grup $f : G \to H$? Jesli tak, wskazać przykład i wyznaczyć obraz. (wsk: taki monomorfizm istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podgrupa $S < H$ izomorficzna z grupą G).

(a) $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \mathbb{Z}_{24}$,
(b) $G = \mathbb{Z}_{10},\ H = \mathbb{Z}$,
(c) $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \mathbb{Z}_{100}$,
(d) $G = \mathbb{Z}_{15},\ H = S_8$,
(e) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Z}, +)$,
(f) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +)$,
(g) $G = S_3,\ H = \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{18}$,
(h) $G = D_4,\ H = S_8$.

2K. Rozważamy grupy G, H oraz dzielnik normalny $K \lhd G$. W każdym z poniższych przypadków udowodnić, że $G/K \cong H$ (wsk: wskazać odpowiedni epimorfizm $f : G \to H$ i skorzystać z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmie grup).
(a) $G = (\mathbb{Z}_{20}, +_{20})$, $K = \{0, 4, 8, 16\}$, $H = (\mathbb{Z}_5, +_5)$.
(b) $G = (\mathbb{C}^*, \cdot),\ K = S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},\ H = (\mathbb{R}^*, \cdot)$.
(c) $G = (\mathbb{R}, +),\ K = 2\pi\mathbb{Z},\ H = S$ (z punktu (b)),
(d) $G = (\mathbb{R}, +),\ K = \mathbb{Z},\ H = S$,
(e) $G = (\mathbb{R}^2, +),\ K = Lin\{(1, 2)\},\ H = (\mathbb{R}, +)$.

3. (a)S Wypisać wszystkie generatory grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$

(b) Załóżmy, że f jest automorfizmem grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$. Udowodnić, że $f(1)$ jest generatorem grupy $\mathbb{Z}_{10}$.

(c) Wyznaczyć wszystkie automorfizmy grupy $\mathbb{Z}_{10}$. Tworzą one grupę $Aut(\mathbb{Z}_{10})$, z działaniem składania.

(d) Sporządzić tabelkę działania grupy $Aut(\mathbb{Z}_{10})$. Czy ta grupa jest abelowa ? cykliczna ? Z którą z poznanych dotąd grup jest ona izomorficzna ?

4K. (a) Udowodnić (wprost z definicji), że $Z(G)$ jest podgrupą grupy G.

(b) Sprawdzić bezpośrednio z definicji, że $Z(G)$ jest dzielnikiem normalnym w G.

5.* Czy następujące pary grup są izomorficzne ?
(a) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ i $(\mathbb{R}, +)$.
(b) $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ i $(\mathbb{Q}, +)$.

6S Grupa przekształceń afinicznych prostej to zbiór funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$A = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}.$$

(a) Sprawdzić, że A jest grupą względem złożenia funkcji.

(b) Sprawdzić, że grupa A jest izomorficzna z grupą macierzy postaci $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, z mnożeniem macierzy.

7. Czy grupa S_3 jest izomorficzna z produktem $G \times H$ dla pewnych nietrywialnych grup G i H ? (wsk: równoważnie: czy grupa S_3 jest produktem wewnętrznym jakichś swoich nietrywialnych podgrup G i H ? Jakie podgrupy ma grupa S_3?)

8. Załóżmy, że $f : G \to H$ jest epimorfizmem grup, $S < H$, $g \in G$, $h \in H$ i $f(g) = h$.

(a) Załóżmy, że G jest abelowa. Udowodnić, że H jest abelowa.

(b) Załóżmy, że G jest cykliczna. Udowodnić, że H jest cykliczna.

(c)S Sprawdzić, że $f^{-1}[S]$ jest podgrupą grupy G.

(d)S Udowodnić, że $f(g^{-1}) = h^{-1}$.

9. Załóżmy, że G jest grupą, $H_1, H_2 < G$ oraz $|H_1| = |H_2| = p$ jest liczbą pierwszą.

(a) Wykazać, że $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ lub $H_1 = H_2$.

(b) Udowodnić, że jeśli $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, to $|G| \geq p^2$. (wsk: udowodnić, że jeśli $h_1, h_1' \in H_1$, $h_2, h_2' \in H_2$ i $h_1 h_2 = h_1' h_2'$, to $h_1 = h_1'$ i $h_2 = h_2'$.)

10. (a)S Wypisać wszystkie permutacje τ w grupie S_5 sprzężone z permutacją $\sigma = (1, 2)(3, 4, 5)$. Za każdym razem wskazać permutację f taką, że $\tau = j_f(\sigma)$.

(b) Znaleźć zbiór wszystkich permutacji w S_5, które komutują z permutacją σ (wsk: permutacja τ komutuje z $\sigma \iff \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$).

(c) Udowodnić, że zbiór z punktu (b) jest podgrupą grupy S_5.

11. W dowolnej grupie G udowodnić, że dla danego $a \in G$ zbiór $C(a) = \{g \in G : ag = ga\}$ jest podgrupą grupy G, zwaną centralizatorem elementu a w grupie G.

12. Załóżmy, że grupa G ma jedyną podgrupę H rzędu 25. Udowodnić, że $H \lhd G$. (wsk: dla $g \in G, gHg^{-1} = j_g[H]$ jest podgrupą grupy G izomorficzną z H).