Algebra 1A, lista 7.

Konwersatorium 5.12.2016, ćwiczenia 6.12.2016.

0S. Materiał teoretyczny: Grupy macierzy i grupy przekształceń liniowych: $GL(n,\mathbb{R})$, $O(n,\mathbb{R})$, $SO(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $Aut(\mathbb{R}^n)$, $Izo_{lin}(\mathbb{R}^n)$, $Izo(\mathbb{R}^n)$, ich izomorfizmy, związki z wyznacznikiem, obrotami. Każda skończona grupa izometrii $\mathbb{R}^n$ ma punkt stały. Środek ciężkości układu punktów. Każda skończona grupa izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy $O(n,\mathbb{R})$. Wyliczenie wszystkich skończonych podgrup $O(2,\mathbb{R})$i $SO(2,\mathbb{R})$, z dokładnością do izomorfizmu.

Wyliczenie skończonych podgrup grupy $SO(3,\mathbb{R})$. Grupy obrotów własnych brył platońskich. Grupa izometrii własnych czworościanu foremnego. Definicje: pierścień (przemienny, z jednością), dzielnik zera, element odwracalny, grupa elementów odwracalnych pierścienia, dziedzina (pierścień całkowity), ciało. Przykłady pierścieni. Każda skończona dziedzina jest ciałem. Wyliczenie, które pierścienie $\mathbb{Z}_n$ są ciałami.

1S. Udowodnić, że $[O(n,\mathbb{R}) : SO(n,\mathbb{R})] = 2$.

2S. Udowodnić, że $SO(2,\mathbb{R})$ jest izomorficzna z grupą S liczb zespolonych modułu 1, z mnożeniem. Wskazówka: macierzy $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ przypisać liczbę $z_\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

3S. Które z grup $GL(2,\mathbb{R})$, $SL(2,\mathbb{R})$, $SO(2,\mathbb{R})$, $O(2,\mathbb{R})$ są abelowe? Następnie to samo dla grup w wymiarze 3 zamiast 2.

4*. Niech G będzie grupą skończoną oraz $a \in G$. Określamy funkcję $f : G \to [a]_\sim$ ($[a]_\sim$ to klasa sprzężenia elementu a) wzorem:

$$f(x) = xax^{-1}$$

.

(a) Udowodnić, że f jest surjekcją i klasy abstrakcji relacji $\sim_f$ na G to dokładnie lewostronne warstwy centralizatora $C(a)$. Tzn:

$$f(x) = f(y) \iff xC(a) = yC(a).$$

Wywnioskować stąd, że $|[a]_\sim| = [G : C(a)]$.

(b) Udowodnić, że $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n}[G : C(a_i)]$, gdzie $a_1, \ldots, a_n$ są reprezentantami wszystkich klas sprzężenia w G rozłącznych z $Z(G)$. Zauważyć też, że $[a]_\sim$ jest jednoelementowy wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in Z(G)$.

(c) Udowodnić twierdzenie Cauchy'ego: jeśli p jest liczbą pierwszą dzielącą $|G|$, to G ma podgrupę rzędu p (wsk: skorzystać z (b)).

(d) Udowodnić, że jeśli $|G| = p^2$, to G jest abelowa.

(e) Wykazać, że dowolna grupa rzędu 15 jest cykliczna.

5*. (a) Udowodnić, że grupa obrotów własnych sześcianu jest izomorficzna z S_4. (Wsk: oznaczmy przez $1, 2, 3, 4$ przekątne sześcianu. Rozważyć obroty własne sześcianu jako permutacje przekątnych.)

(b) Udowodnić, że grupa obrotów własnych dwunastościanu foremnego jest izomorficzna z A_5. (Wsk: w dwunastościan foremny można wpisać pięć sześcianów (tak, że wierzchołki sześcianów są wierzchołkami dwunastościanu). Rozważyć obroty tej bryły jako permutacje tego zbioru sześcianów.)

6. (a) W grupie izometrii własnych czworościanu foremnego wskazać podgrupę izomorficzną z grupą D_3 (wsk:rozważyć izometrie własne ustalonej ściany czworościanu).

(b) W grupie izometrii własnych sześcianu wskazać podgrupę izomorficzną z grupą D_4 i podgrupę izomorficzną z grupą D_3 (wskazówka: sześcian jest stowarzyszony z ośmiościanem foremnym, mają więc izomorficzne grupy izometrii własnych).

(c) W grupie izometrii własnych dwunastościanu foremnego wskazać podgrupę izomorficzną z D_5 i podgrupę izomorficzną z D_3.

7. (a) W grupie automorfizmów linowych płaszczyzny $Aut(\mathbb{R}^2)$ wskazać elementy rzędu 2 oraz rzędu ∞, niebędące izometriami.

(b)* Czy w (a) istnieje taki element rzędu 3 ?

(c) Udowodnić, że jeśli automorfizm liniowy płaszczyzny ma rząd nieparzysty, to jego macierz ma wyznacznik 1.

8S. Sprawdzić, że podane niżej zbiory sa pierścieniami przemiennymi (z jednością lub bez), ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia liczb. Czy są one ciałami ?

(a) $n\mathbb{Z}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

(b) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$, pierścień Gaussa (tu $i \in \mathbb{C}$ to jednostka urojona).

(c) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, $d \in \mathbb{N}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

9S. Wykazać, że struktura $(A, \oplus, \odot)$ nie jest pierścieniem.

(a) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \oplus = +,\ \odot = \cdot$.

(b) $A = \mathbb{R},\ a \oplus b = \frac{a+b}{2},\ a \odot b = a \cdot b$.

(c) $A = \mathbb{N},\ \oplus = +,\ \odot = \cdot$.

(d) $A = \{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, $\oplus$ i $\odot$ to zwykłe dodawanie i mnożenie liczb.

(e) $A = \mathbb{R}_+,\ a \oplus b = a \cdot b,\ a \odot b = a^b$.

10S. Załóżmy, że A, B są podpierścieniami pierścienia R. Udowodnić, że $A \cap B$ jest podpierścieniem pierścienia R.

10K. (a) Dany jest pierścień przemienny z jednością R. Udowodnić, że R^* jest grupą względem mnożenia (zwaną grupą elementów odwracalnych pierścienia R).

(b) Wypisać wszystkie dzielniki zera w pierścieniu $\mathbb{Z}_{24}$ i wszystkie elementy odwracalne w pierścieniu $\mathbb{Z}_{24}$. Czy $\mathbb{Z}_{24}^*$ jest cykliczna ? Znaleźć produkt grup cyklicznych izomorficzny z $\mathbb{Z}_{24}^*$.

(c) To samo, co w (b), dla pierścienia $\mathbb{Z}_{10}$.

(d) Niech $n > 1$. Udowodnić, że $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ jest dzielnikiem zera w $\mathbb{Z}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy a i n nie są względnie pierwsze.

(e) Niech $n > 1$. Udowodnić, że $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy a i n są względnie pierwsze. (Wsk: wzorować się na dowodzie z wykładu, że skończona dziedzina jest ciałem. Rozważyć liczby $a \cdot_n 1, a \cdot_n 2, \ldots, a \cdot_n (n-1)$.)

11. (a) Udowodnic, że grupa $Aut(\mathbb{Z}_{24}, +_{24})$ jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}_{24}^*$ (wsk: automorfizm grupy $\mathbb{Z}_{24}$ jest wyznaczony przez wartość na generatorze 1, a wartość ta może być dowolnym innym generatorem tej grupy).

(b)* Ogólniej: $Aut(\mathbb{Z}_n, +_n) \cong \mathbb{Z}_n^*$.

12. Niech $+, \cdot$ będą działaniami określonymi w zbiorze A. Wiadomo, że $(A, +)$ jest grupą, zaś działanie $\cdot$ jest łączne, rozdzielne względem $+$ i ma element neutralny $1 \in A$. Wykazać, że wtedy $(A, +, \cdot)$ jest pierścieniem. (wsk: wystarczy udowodnić przemienność $+$. W tym celu wymnożyć na dwa sposoby $(1+1)(a+b)$ i porównać wyniki.)

13. Załóżmy, że $(R, +, \cdot)$ jest pierścieniem, w którym grupa addytywna $(R, +)$ jest cykliczna. Udowodnić, że R jest przemienny.

14. Niech S oznacza grupę liczb zespolonych modułu 1, z mnożeniem, zaś S_∞ jej podgrupę złożoną ze wszystkich zespolonych pierwiastków z 1. Udowodnić, że każdy element grupy ilorazowej S/S_∞ różny od elementu neutralnego ma rząd ∞.

15*. Załóżmy, że w pierścieniu R mamy $a^2 = a$ dla wszystkich $a \in R$ (uwaga: a^2 oznacza $a \cdot a$).

(a) Udowodnić, że $2a = 0$ dla wszystkich $a \in R$. (uwaga: $2a$ oznacza $a + a$).

(b) Udowodnić, że R jest przemienny (wsk: rozważyć $(a+b)^2$).