**Algebra 1A, lista 8.**

Konwersatorium 12.12.2016, ćwiczenia 13.12.2016

0S. Materiał teoretyczny: Homomorfizm i izomorfizm pierścieni, definicja, przykłady. Produkt pierścieni. Izomorfizm pierścieni $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$, gdy $m$ i $n$ są względnie pierwsze.

Funkcja i twierdzenie Eulera. Pierścienie wielomianów: definicja, podstawowe własności (stopień wielomianu, $R$-dziedzina $\Rightarrow$ $R[X]$ – dziedzina). Wielomiany a funkcje wielomianowe. Homomorfizm ewaluacji w punkcie. Pierścień $C(\mathbb{R})$.

1S. (a) Napisać tabelki działań w produkcie pierścieni $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

(b) Wskazać dzielniki zera i elementy odwracalne w tym pierścieniu.

2K. Które z poniższych pierścieni są dziedzinami, a które ponadto ciałami ?

(a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

(b) $(\mathcal{P}(\{a\}), \triangle, \cap)$,

(c) pierścień Gaussa (patrz zad. 8 z listy 7),

(d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

3K. Znaleźć wszystkie homomorfizmy $f : R \to S$ pierścieni z jednością $R$ i $S$ (uwaga: zgodnie z definicją, $f(1_R) = 1_S$).

(a) $R = \mathbb{Z},\ S = \mathbb{Z}_6$.

(b) $R = \mathbb{Z}_{15},\ S = \mathbb{Z}_3$.

(c) $R = \mathbb{Z}_7,\ S = \mathbb{Z}_4$.

(d) $R = \mathbb{Z},\ S = \mathbb{Z}$.

(e) $R = \mathbb{Q},\ S = \mathbb{Q}$.

(f) $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = S$ (wsk: rozważyć, jakie mogą być wartości $f(0,1)$ i $f(1,0)$).

4K. Znaleźć wszystkie dzielniki zera w pierścieniach:

(a) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

(b) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$

(c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

(d) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$.

5. Obliczyć $r_{35}(14^{320}),\ r_{28}(35^{320}),\ r_{45}(28^{320})$.

6. Niech $\mathbb{Z}[i]$ oznacza pierścień Gaussa. Niech $R = \{\frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z}[i] \text{ i } y \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Sprawdzić, że $R$ jest ciałem (podciałem $\mathbb{C}$).

(b) Udowodnić, że $R = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Uwaga: $R$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia Gaussa.

7K. Załóżmy, że $R$ jest pierścieniem przemiennym z jednością oraz $a \in R$. Określamy funkcję $\varphi_a : R[X] \to R$ wzorem:

$\varphi_a(W(X) = \hat{W}(a)$. Sprawdzić, że tak określona funkcja jest homomorfizmem pierścieni z jednością, zwanym homomorfizmem ewaluacji w punkcie $a$.

8K. Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścieni $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ (wsk: $f(1) = 1$).

9. Niech $C(R)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. W zbiorze tym określamy działania $+$ i $\cdot$ następująco:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Zbiór $C(X)$ z tymi działaniami jest pierścieniem przemiennym z jednością.

(a) Czy funkcja $f(x) = x$ jest odwracalna w pierścieniu $C(\mathbb{R})$ ? Czy jest dzielnikiem zera ?

(b) Podać przykład funkcji odwracalnej w $C(\mathbb{R})$, różnej od funkcji stale równej jeden (jedności pierścienia $C(\mathbb{R})$).

(c) Które funkcje w $C(\mathbb{R})$ są odwracalne ?

(d) Podać przykład funkcji w $C(\mathbb{R})$, która jest dzielnikiem zera w $C(\mathbb{R})$.

(e) Które funkcje w $C(\mathbb{R})$ są dzielnikami zera ?

10. Określić działania $\oplus$ i $\odot$ w zbiorze $\mathbb{Z}$ tak, by funkcja $f : (\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dana wzorem $f(x) = x + 1$ była izomorfizmem. Wywnioskować stąd, że $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ jest pierścieniem (jest to struktura indukowana ze struktury $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ poprzez funkcję $f$).Wskazać jedność i zero pierścienia $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

11. Pokazać, że

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

jest podpierścieniem pierścienia $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, izomorficznym z ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.