Algebra 1A, lista 9.

Konwersatorium 19.12.2016, ćwiczenia 3.01.2017.

0S. Materiał teoretyczny: Ciało ułamków dziedziny: konstrukcja, podstawowe własności, przykłady: $\mathbb{Q}$ jako ciało ułamków $\mathbb{Z}$, ciało funkcji wymiernych $\mathbb{R}(X), \mathbb{R}(X,Y), F(X)$. Norma euklidesowa i pierścień euklidesowy: definicja. Twierdzenie Bezouta. Pierścień Gaussa jako pierścień euklidesowy. Podzielność w pierścieniu R. Największy wspólny dzielnik $NWD(a,b)$ i najmniejsza wspólna wielokrotność $NWW(a,b)$ w dziedzinie R (definicja). Istnienie NWD w pierścieniu euklidesowym. Algorytm Euklidesa w $\mathbb{Z}$ i w dowolnym pierścieniu euklidesowym R.

1. Wykonać dzielenie z resztą w następujących pierścieniach euklidesowych. Podzielić:

(a)S $3X^4 + 4x^3 - X^2 + 5X - 1$ przez $2X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$,

(b)S $X^6 + X^4 - 4X^3 + 5X$ przez $X^3 + 2X^2 + 1$ w $\mathbb{R}[X]$,

(c)S $X^7 + X^6 + X^4 + X + 1$ przez $X^3 + X + 1$ w $\mathbb{Z}_2[X]$,

(d)S $2X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + 2$ przez $X^3 + 2X + 2$ w $\mathbb{Z}_3[X]$,

(e)K $17 + 11i$ przez $3 + 4i$ w $\mathbb{Z}[i]$,

(f)S $20 + 8i$ przez $7 - 2i$ w $\mathbb{Z}[i]$.

W punktach (e) i (f) podac wszystkie możliwe wyniki dzielenia z resztą.

2. Znaleźć $NWD(a,b)$ w podanym pierścieniu euklidesowym, znaleźć element s, t takie, że $as+bt$ jest $NWD(a,b)$. (w razie potrzeby do omówienia na konwersatorium)

(a)S $a = 33,\ b = 42$ w $\mathbb{Z}$,

(b)S $a = 2891,\ b = 1589$ w $\mathbb{Z}$,

(c)S $a = 2X^3 - 4X^2 - 8X + 1,\ b = 2X^3 - 5X^2 - 5X + 2$ w $\mathbb{Q}[X]$,

(d)S $a = x^6 - X^3 - 16X^2 + 12X - 2,\ b = X^5 - 2X^2 - 16X + 8$ w $\mathbb{Q}[X]$,

(e)S $a = X^4 + X + 1,\ b = X^3 + X^2 + X$ w $\mathbb{Z}_3[X]$,

(f)S $a = X^4 + 2,\ b = X^3 + 3$ w $\mathbb{Z}_5[X]$,

(g)S $a = 4 - 1,\ b = 1 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$.

3. Znaleźć jakiekolwiek rozwiązanie $x, y \in \mathbb{Z}$ równania:

(a) $15x + 36y = 3$,

(b) $24x + 29y = 1$,

(c) $24x + 29y = 6$.

4. Rozstrzygnąć, czy dany element jest odwracalny w danym pierścieniu. Jeśli tak, znaleźć element odwrotny.

(a) 105 w $\mathbb{Z}_{351}$.

(b) 327 w $\mathbb{Z}_{2012}$.

5. Załóżmy, że p jest liczba pierwszą.

(a) Udowodnić, że $(X - a)|(X^{p-1} - 1)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla każdego niezerowego $a \in \mathbb{Z}_p$.

(b) Obliczyć iloraz $(X^{p-1} - 1)/(X - a)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$ gdzie $p = 5,\ a = 2$.

(c) Udowodnić, że $(X^{p-1} - 1) = (X - 1)(X - 2)\dots(X - p + 1)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$.

6. Załóżmy, że $W(X)$ jest wielomianem stopnia n nad dziedzina R. Udowodnic, że W ma nie więcej niż n pierwiastków w R (wsk: rozważyć ciało ułamków $Q = R_0$ pierścienia R).

7. Ile pierwiastków ma wielomian $X^3+5X \in \mathbb{Z}_6[X]$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_6$? Porównać wynik z poprzednim zadaniem.

8. (a) Czy funkcja $\delta(W(X)) = \deg(W)$ jest normą euklidesową w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$?

(b)* Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}[X]$ nie jest euklidesowy.

9. Załóżmy, że R jest dziedziną oraz $a, b \in R$, $b \neq 0$.

(a) Udowodnić, że jeśli $a|b$, to istnieje jedyne $q \in R$ takie, że $aq = b$. q nazywamy ilorazem b przez a.

(b) Niech R_0 oznacza ciało ułamków dziedziny R. W sytuacji w (a) udowodnić, że w ciele R_0 q jest równy ułamkowi $\frac{b}{a}$. Dlatego q oznaczamy przez $\frac{b}{a}$.

(c) Załóżmy, że $d \in R$ jest $NWD(a, b)$. Udowodnić, że $\frac{ab}{d}$ jest wspólną wielokrotnością a i b, tzn. jest podzielne przez a oraz przez b w R.

10*. Załóżmy, że R jest pierścieniem euklidesowym w którym $\delta(a+b) \leq \max\{\delta(a), \delta(b)\}$ dla wszystkich niezerowych $a, b \in R$ takich, że $a + b \neq 0$. Udowodnić, że iloraz i reszta w dzieleniu z resztą w R sa wyznaczone jednoznacznie.