

Logika, lista 1.

1. Które zdania (formuły) są prawdziwe w strukturze pustej ?
2. Dowieść, że jeśli formuła φ jest przykładem schematu α , to $\models \alpha$ implikuje $\models \varphi$.
3. Dowieść, że jeśli $\models \alpha \rightarrow \beta$ i $p_1, \dots, p_k$ są wszystkimi wspólnymi zmiennymi zdaniowymi schematów α i β , to istnieje schemat $\gamma(p_1, \dots, p_k)$ taki, że $\models \alpha \rightarrow \gamma$ i $\models \gamma \rightarrow \beta$.
4. Dowieść, że jeśli $v, v' : S \rightarrow \{0, 1\}$ są wartościowaniami logicznymi oraz $v|_Z = v'|_Z$, to $v = v'$ (Z : zbiór zmiennych zdaniowych).
5. Definiujemy spójniki logiczne $\perp$ i $|$ przez $\alpha \perp \beta = \neg(\alpha \wedge \beta)$, $\alpha | \beta = \neg(\alpha \vee \beta)$. Dowieść, że za pomocą każdego z tych spójników można zdefiniować wszystkie pozostałe spójniki logiczne; następnie pokazać, że $\perp$ i $|$ są jedynymi spójnikami o tej własności (wsk: jaka może być definicja negacji $\neg$?).
- 6-. Napisać na chybił-trafił tabelkę schematu zdaniowego o zmiennych p, q, r . Następnie napisać schemat $\alpha(p, q, r)$ o takiej właśnie tabelce wartości logicznych.
7. Dowieść, że schemat zdaniowy α jest równoważny schematowi zbudowanemu ze zmiennych zdaniowych i spójników $\wedge, \rightarrow$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wartościowania w , jeśli $w|_Z \equiv 1$, to $w(\alpha) = 1$ (wsk: rozważyć $\neg\alpha$).
- 8-. Sprawdzić, czy reguły odrywania i generalizacji są poprawnymi regułami wnioskowania i czy każdy aksjomat KRL jest tautologią.
9. Dowieść tw. o dedukcji: Jeśli φ jest zdaniem, to $(X \vdash \varphi \rightarrow \psi \iff X \cup \{\varphi\} \vdash \psi)$. (wsk do $\Leftarrow$: Załóżmy, że $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \psi$ jest dowodem ψ z $X \cup \{\varphi\}$. Pokazać przez indukcję, że $X \vdash \varphi \rightarrow \alpha_i$ dla każdego i). Pokazać, że założenie, że φ jest zdaniem, jest istotne.
10. Dowieść, że zbiór formuł X jest sprzeczny $\iff Cn(X) = Form_L$.
11. Dowieść tw. Lindenbauma: każda niesprzeczna teoria X jest zawarta w pewnej niesprzecznej zupełnej teorii X' (wsk: skorzystać z lematu Zorna).
- 12-. Dowieść, że każda formuła φ jest równoważna formule φ' w postaci normalnej, tzn. $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$, gdzie $\varphi' = Q_1 x_{i_1} Q_2 x_{i_2} \dots Q_k x_{i_k} \psi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, gdzie $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, ψ nie zawiera kwantyfikatorów i zasięg każdego z kwantyfikatorów w φ' stanowi cała część formuły φ' na prawo od niego.

uwaga: zadania oznaczone minusem – nie mogą być rozwiązywane jako pisemne zadania domowe.