

1. Dowieść, że $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \forall M \models T, M \models \varphi$. Wywnioskować stąd, że definicja $\vdash$ jest poprawna.
2. Dowieść, że $M \cong N \Rightarrow M \equiv N$.
3. Dowieść, że jeśli $M \equiv N$ i L, M są skończone, to $M \cong N$. Więcej: istnieje zdanie σ takie, że $M \models \sigma$ oraz $\forall N \models \sigma, N \cong M$.
4. Załóżmy, że L jest skończonym językiem relacyjnym. Dowieść, że $M \equiv N \Leftrightarrow \forall n \ D$ ma strategię zwycięską w grze $\Gamma_n(M, N)$.
5. Dowieść, że jeśli T jest zupełna i posiada rekurencyjnie przeliczalny zbiór aksjomatów, to T jest rozstrzygalna.
6. Załóżmy, że w zdaniu φ występują wyłącznie unarne symbole relacyjne (poza logicznymi). Dowieść, że $\exists n < \omega$ (n zależy tylko od długości φ) takie, że jeśli φ ma model, to ma model mocy $< n$.
7. Wywnioskować stąd, że istnieje algorytm rozstrzygający, czy φ jest tautologią dla φ takich, jak w zadaniu 6.
8. Niech

$$FLO = \{\varphi : \forall M \models LO, M \text{ skończony} \Rightarrow M \models \varphi\},$$

$$FLO_\infty = \{\varphi : \exists n \forall M \models LO, M \text{ skończony i } \|M\| > n \Rightarrow M \models \varphi\}.$$

- (a) Dowieść, że teorie FLO, FLO_∞ są rozstrzygalne (wsk: użyć gier Ehrenfeuchta).
- (b) Zauważyć, że FLO nie jest zupełna, FLO_∞ jest zupełna i $FLO_\infty = Th(?, \leq)$.
9. (a) Dowieść, że nie istnieje zdanie φ takie, że $\forall M, M \models \varphi \Leftrightarrow M \text{ skończony}$.
 (b) Dowieść, że nie istnieje teoria $T \supseteq LO$ która ma modele nieskończone i której wszystkie modele nieskończone są dobrze uporządkowane.

1. Niech BA_0 będzie teorią bezatomowych algebr Boole'a. Dowieść, że BA_0 jest $\aleph_0$ -kategoryczna i dopuszcza redukcję kwantyfikatorów.
2. Udowodnić, że jeśli T jest zupełna i dopuszcza redukcję kwantyfikatorów, to dla $M, N \models T$, $M \subseteq N$ implikuje $M \prec N$.
3. Sprawdzić, że przestrzeń Stone'a $S(B)$ algebry Boole'a B jest zwarta. Dowieść, że gdy B jest przeliczalna, to przestrzeń $S(B)$ jest homeomorficzna z domkniętym podzbiorem zbioru Cantora.
4. Załóżmy, że M jest modelem dla języka L oraz N jest modelem teorii $Th(M, n)_{m \in M}$ (w języku $L(M)$). Niech $M' = \{m^N : m \in M\}$. Dowieść, że
 - (a) M' jest modelem dla L (ze strukturą indukowaną z N).
 - (b) $M' \cong M$ oraz $M' \prec N$.
5. Udowodnić, że każdy filtr właściwy w algebrze Boole'a B zawiera się w pewnym ultrafiltrze.
6.
 - (a) Udowodnić, że każde dwie skończone algebry Boole'a o tej samej liczbie elementów są izomorficzne.
 - (b) Udowodnić, że algebra Boole'a B jest skończona $\iff S(B)$ jest skończona.
 - (c) Udowodnić, że liczba elementów skończonej algebry Boole'a jest potęgą 2.
7. Udowodnić, że w pewnym elementarnym rozszerzeniu Z' grupy $(Z, +)$ istnieje element $a \neq 0$ podzielny (tzn. taki, że dla każdego $n > 0$, $Z' \models \exists x \underbrace{x + \dots + x}_n = a$).
8.
 - (a) Opisać wszystkie modele przeliczalne teorii (Z, S) , gdzie S jest funkcją następnika (z dokładnością do izomorfizmu).
 - (b) Cyklem na zbiorze k -elementowym $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ nazwiemy strukturę (X, S) , gdzie S jest permutacją zbioru X taką, że $S(x_i) = x_{i+1}$ dla $i < k$, zaś $S(x_k) = x_1$. Niech T będzie teorią cykli skończonych w języku $L = \{S\}$, tzn. zbiorem zdań prawdziwych we wszystkich cyklach skończonych (X, S) . Udowodnić, że T i $Th(Z, S)$ mają te same nieskończone modele przeliczalne.
9. Załóżmy, że G jest pewną grupą permutacji niepustego skończonego zbioru X (tzn. $G < S(X)$). Udowodnić, że dla pewnego języka L , na zbiorze X można określić strukturę dla L tak, że $G = Aut(X)$.