

Jak zwykle, każdy podpunkt zadania traktowany jest jako potencjalnie jedno z 3 zadań domowych oraz wśród tych 3 zadań domowych nie mogą się znaleźć dwa podpunkty z tego samego zadania z listy.

1. Niech R^* będzie niestandardowym modelem analizy, tzn. $\aleph_1$ -nasyconym modelem teorii

$$A = Th(R, +, \cdot, f, P, x)_{f, P, x} \text{ wszystkie funkcje, relacje, l.rzeczywiste,}$$

elementarnym rozszerzeniem R .

(a) Liczbę $a \in R^*$ nazywamy ograniczoną, jeśli istnieje $r \in R$ t.je $R^* \models -r < a < r$. Liczbę $a \in R^*$ nazywamy infinitezymalną, jeśli $\forall n \in N, R^* \models -1/n < a < 1/n$. Dowieść, że jeśli $a \in R^*$ jest ograniczona, to istnieje jedyna liczba $st(a) \in R$ taka, że $st(a) - a$ jest infinitezymalna. $st(a)$ nazywamy częścią standardową a .

(b) Załóżmy, że $f : R \rightarrow R$ jest różniczkowalna w $a \in R$. Niech $a' \neq 0$ będzie infinitezymalną. Dowieść, że $f'(a) = st(\frac{f(a+a')-f(a)}{a'})$.

(c) jedną z relacji języka L jest $N(x)$ definiująca w R liczby naturalne. Dowieść, że $(N^{R^*}, +, \cdot)$ jest $\aleph_1$ -nasyconym rozszerzeniem $(N, +, \cdot)$. W związku z tym w R^* istnieją niestandardowe liczby naturalne.

(d) Załóżmy, że $f : I \rightarrow R$ jest ciągła. $I = [0, 1]$. Niech $n^* \in R^*$ będzie niestandardową liczbą naturalną. Dowieść, że

$$\int_I f = st(\sum_{i=0}^{n^*-1} \frac{1}{n^*} f(\frac{i}{n^*})).$$

(formalnie: w R : niech $g(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$, g jest symbolem języka L . Wówczas w $R^* : g^{R^*}(n^*)$ interpretujemy formalnie jako $\sum_{i=0}^{n^*-1} \frac{1}{n^*} f(\frac{i}{n^*})$).

(e) Załóżmy, że $f : R \rightarrow R$. Dowieść, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a \iff \forall$ infinitezymalnej $b > 0, st(f(b)) = a$.

Wymyślić różne inne podobne przykłady: rozmaitości, ruchy Browna, osobliwości itp.

2. (a) Dowieść, że jeśli $M \equiv N$, N przeliczalny, M $\aleph_0$ -nasycony, to $\exists M' \prec M, M' \cong N$.
(b) Dowieść, że jeśli $M \equiv N$ są przeliczalne, nasycone, to $M \cong N$.
3. Niech T będzie teorią niezależnych predykatów $P_n(x), n < \omega$.
(a) Udowodnić, że T jest q.e.,
(b) Opisać typy w $S_1(M), M \models T$.
(c) Dowieść, że $\forall \kappa \geq 2^{\aleph_0}$, T jest κ -stabilna.
(d) Opisać nasycony model T w dowolnej mocy $\geq 2^{\aleph_0}$.

4. (a) Dowieść, że $DLO_0 = Th(Q, \leq)$ oraz BA_0 nie są $\aleph_0$ -stabilne (wsk: w DLO_0 : cięcia Dedekinda).
 (b) Dowieść, że teorie te nie są stabilne.
5. Załóżmy, że M jest nieskończonym, przeliczalnym, nasyconym modelem. Dowieść, że $Aut(M)$ jest
 - (a) nieskończona,
 - (b) mocy $2^{\aleph_0}$,
 - (c) homeomorficzna z przestrzenią Baire'a.
 Nawiasem mówiąc, w ten sposób dostajemy wiele przykładów grup topologicznych, tzn. grup, które są przestrzeniami topologicznymi T_1 (a więc i $T_{3\frac{1}{2}}$) i w których działania grupowe (mnożenie i branie elementu odwrotnego) są ciągłe.
6. Udowodnić tw. Scotta: (a) punkt (1), (b): punkt (2).
7. Znaleźć zdania Scotta dla następujących struktur: (a) $(Z, \leq)$ (b) $(Q, \leq)$, (c) $(N \cup N^*, \leq)$, (d) $(Z \cup Z, \leq)$ (tu: $N^* = N$ z odwróconym porządkiem, $Z \cup Z$: dwie kopie Z , jedna za drugą).
8. * Dowieść, że dla T zupełnej w języku przeliczalnym i $\kappa < 2^{\aleph_0}$:
 Jeśli $\{p_\alpha, \alpha < \kappa\} \subseteq S(\emptyset)$ jest rodziną typów nieizolowanych, to $\exists M \models T$ omijający wszystkie typy $p_\alpha, \alpha < \kappa$.