

W zadaniach 2-10, U oznacza ultrafiltr niegłówny na ω . Zadania w następujących grupach są podobne:

$$\{2, 3, 4\}, \{6, 7, 8\}, \{14, 16, 17, 18\}.$$

Jako zadanie domowe wolno zrobić co najwyżej jedno zadanie w każdej z tych grup. Podpunkt każdego zadania liczy się jako oddzielne zadanie. Nie wolno oddać jako zadania domowego dwóch podpunktów tego samego zadania.

1. Załóżmy, że φ jest formułą w języku L . Niech T oznacza skolemizację teorii w języku L , z pustym zbiorem aksjomatów.

(a) Udowodnić, że istnieje skończony zbiór $A \subseteq T$ złożony z formuł otwartych, taki że w teorii o zbiorze aksjomatów A , zdanie φ jest równoważne pewnej formule otwartej ψ .

(b) Niech L' będzie skończonym językiem złożonym z symboli występujących w A i φ i ψ (z punktu (a)). Załóżmy, że M jest L' -strukturą, modelem dla zbioru formuł $A' = A \cup \{\varphi\}$ oraz $B \subseteq M$. Udowodnić, że podstruktura struktury M generowana przez zbiór B również jest modelem dla A' .

Komentarz: to zadanie jest podstawą dla metody rezolucji. Metoda ta to semi-algorytm rozstrzygający, czy dana formuła jest tautologią (daje odpowiedź tak, gdy jest, nie daje odpowiedzi w przeciwnym razie).

2. Dowieść, że jeśli $N_i, i < \omega$ jest rodziną struktur skończonych takich, że ciąg $k_i = \|N_i\|$ jest rosnący, to $\prod_{i \in \omega} N_i/U$ ma moc $2^{\aleph_0}$.
3. W strukturze $\prod_{i \in \omega} (N, <)/U$ znaleźć nieskończony ciąg malejący.
4. Załóżmy, że $K_n, n < \omega$, są ciałami. Niech $R = \prod_{n \in \omega} K_n$, $K = \prod_{n \in \omega} K_n/U$. R jest pierścieniem, K jest ciałem. Niech $M = \{f \in R : \{i : f(i) = 0\} \in U\}$. Dowieść, że M jest ideałem maksymalnym w R oraz $K \cong R/M$.
5. Dowieść, że $\prod_{n \in \omega} M_n/U$ jest $\aleph_1$ -nasycony (zakładamy, że język jest przeliczalny).
6. Dowieść, że $\prod_{n \in \omega} (Z, +)/U$ nie jest wolną grupą abelową.
7. Niech $F(2)$ będzie grupą wolną o 2 generatorach. Dowieść, że $\prod_{n \in \omega} F(2)/U$ nie jest grupą wolną (wsk. do 5,6: znaleźć w ultrapotęęgach element, który jest podzielny przez n dla każdego $n > 0$).
8. Załóżmy, że G jest grupą. Dowieść, że następujące warunki są równoważne:
 - (a) $\prod_{n \in \omega} G/U$ zawiera kopię $F(2)$.
 - (b) $\forall n \exists a, b \in G \forall$ nieskracalnego słowa $w(x, y)$ długości $\leq n$, $G \models w(a, b) \neq e$.

9. * Niech G będzie grupą $\{f \in \text{Sym}(\omega) : \{i : f(i) \neq i\} \text{ jest skończony}\}$ (permutacje ω o nośnikach skończonych, $\text{Sym}(\omega)$ oznacza grupę wszystkich permutacji zbioru ω). Używając zad. 7 dowieść, że $\prod_{n \in \omega} G/U$ zawiera kopię $F(2)$.
10. * Dowieść, że jeśli $\prod_{n \in \omega} G/U$ zawiera kopię $F(2)$, to zawiera grupę wolną o $2^{\aleph_0}$ -generatorach.
11. Niech $R^* = \prod_{n \in \omega} R/U$. $R \prec R^*$. Znaleźć w R^* elementy:
 - (a) nieskończenie małe, nieskończenie duże;
 - (b) inne obiekty rozważane na liście 4 w związku z analizą niestandardową.
12. Załóżmy, że relacja R jest grafem działania $*$ na zbiorze X (tzn. $R(x, y, z) \iff x * y = z$). Napisać w języku $L = \{R\}$ zdanie φ takie, że
 - (a) $(X, R) \models \varphi \iff *$ jest przemienne;
 - (b) $(X, R) \models \varphi \iff *$ jest łączne.
 (tego zadania nie wolno oddawać jako zadania domowego).
13. Dowieść, że dla $\alpha < \beta$, $V_\alpha \subseteq V_\beta$ oraz $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$. (tego zadania nie wolno oddawać jako zad. domowe)
14. Załóżmy, że U jest ultrafiltrem na zbiorze I . Dowieść, że $\prod_{i \in I} (\omega, <)/U$ jest dobrym porządkiem $\iff U$ jest zamknięty ze względu na przeliczalne przekroje.
15. * Napisać formułę $\text{Sat}(x, y)$ w języku L_{ZF} taką, że dla $\varphi \in L_{ZF}$, $\text{Sat}(X, \varphi) \iff (X, \in) \models \varphi$.
16. Dowieść twierdzenia o $\in$ -indukcji:
Jeśli $\forall x ((\forall y \in x \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x))$, to $\forall x \varphi(x)$.
17. Definiujemy rangę $rk : V \rightarrow \text{Ord}$ w następujący sposób (przez $\in$ -indukcję):
 $rk(x) = \min\{\alpha \in \text{Ord} : \forall y \in x \text{ } rk(y) < \alpha\}$.
 Dowieść, że $rk(x) \leq \alpha \iff x \in V_{\alpha+1}$.
18. Udowodnić (bez odwoływania się do pewnika wyboru i aksjomatu nieskończoności), że dla każdego zbioru x istnieje zbiór x' równoliczny z x i rozłączny z x .