

Konwersatorium 25.03.2013, ćwiczenia 5.04.2013

1. T Pary i n -ki uporządkowane. Produkty kartezjańskie: definicja, własności. Rzut zbioru na oś. Cięcia zbioru: poziome i pionowe. Wykres funkcji zdaniowej. Kwantyfikatory: zapis formalny, sformułowania potoczne. Kwantyfikatory jako uogólnione: koniunkcja, alternatywa. Kwantyfikatory zrelatywizowane (ograniczone). Kwantyfikowanie po zbiorze pustym. Tłumaczenie zdań z kwantifikatorami przy pomocy cięć poziomych i pionowych.
2. K Zaznaczyć w układzie współrzędnych Oxy wykresy następujących funkcji zdaniowych. Wszystkie zmienne przebiegają tu zbiór liczb rzeczywistych.
 - (a) $x \cdot y = 1$,
 - (b) $(x + 1) \cdot (y - 1) = 1$ (jak związane są wykresy z punktu (a) i (b) ?),
 - (c) $x < |y|$,
 - (d) $|(x - \frac{1}{2}) \cdot (y + \frac{1}{2})| \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$,
 - (e) $x < |y| \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 1$,
 - (f) $x^3 + 1 > 0$ (wsk: jeśli para $\langle x, y \rangle$ spełnia tę funkcję zdaniową, to para $\langle x, y' \rangle$ też, dla wszystkich $y' \in R$),
 - (g) $x < \sin y$.
3. Narysować (o ile to jest możliwe) w układzie współrzędnych Oxy takie podzbiory A i B produktu kartezjańskiego $[0, 1] \times [0, 1]$, że
 - (a) $\pi_X[A] = \pi_X[B] = [1/4, 3/4] = \pi_Y[A] = \pi_Y[B]$ i zbiory A i B są rozłączne.
 - (b) Zbiór A ma 5 elementów, $\pi_X[A]$ jest zbiorem 2-punktowym, zaś $\pi_Y[A]$ zbiorem 3 elementowym.
 - (c) Zbiór A ma 13 elementów, zbiór $\pi_X[A]$ 3 elementy, zaś zbiór $\pi_Y[A]$ 4 elementy.
4. * (a) Rozważamy pewien zbiór $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$. Załóżmy, że dla wszystkich $a \in [0, 1]$, $A_a = [0, \sqrt{a}]$. Obliczyć A^a .
(b) Jaką cechę ma kontur zbioru A w układzie współrzędnych Oxy , jeśli wiadomo, że dla wszystkich $a \in [0, 1]$ mamy $A_a = A^a$?
5. Zapisać symbolicznie przy pomocy kwantyfikatorów (i innych symboli matematycznych i logicznych) następujące zdania. Jeśli to możliwe, ocenić, czy są to zdania prawdziwe.
 - (a) Każda liczba naturalna jest nieujemna.
 - (b) Pewna liczba naturalna jest nieujemna.
 - (c) Każda liczba rzeczywista, która jest rozwiązaniem równania $x^2 - 2x - 3 = 0$, jest nieujemna.
 - (d) Pewna liczba rzeczywista, która jest rozwiązaniem równania $x^2 - 2x - 3 = 0$, jest nieujemna.

- (e) żadna¹ liczba rzeczywista, która jest rozwiązaniem równania $x^2 - 2x - 3 = 0$, nie jest nieujemna.
- (f) Pewien element zbioru A , który należy do zbioru B , jest rozwiązaniem równania $x^7 - x^2 + 5 = 0$
- (g) żaden element zbioru A , który należy do zbioru B , nie jest rozwiązaniem równania $x^7 - x^2 + 5 = 0$.
- (h) Zbiór A ma dokładnie jeden element.
- (i) Zbiór A ma dokładnie 3 elementy.
- (j) Zbiór A ma przynajmniej dwa elementy.
- (k) Liczba n jest podzielna przez liczbę k . (Tu n i k oznaczają dane liczby całkowite).
- (l) Każda liczba całkowita ma przynajmniej dwa różne dzielniki dodatnie.
- (m) Nie wszystkie elementy zbioru A są elementami zbioru B .

Zapisać też symbolicznie zaprzeczenia tych zdań, ale w taki sposób, by nie zaczynały się od symbolu negacji.

6. K Dla każdej z poniższych formuł zdaniowych podać **zdania** p i q takie, że odpowiednie formuły stają się zdaniami (a) prawdziwymi, (b) fałszywymi.

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p; \quad (\neg p \vee q) \wedge p; \quad \neg p \Rightarrow p$$

7. K W każdym z podpunktów zadania podać funkcję zdaniową (predykat) $Q(x)$, $x \in R$ taki, że dana formuła staje się zdaniem prawdziwym.

(a) $\exists x(x > 0 \wedge Q(x)) \wedge \exists x(x > 0 \wedge \neg Q(x)) \wedge \exists x(\neg x > 0 \wedge Q(x)) \wedge \exists x(\neg x > 0 \wedge \neg Q(x))$,

(b) $\forall x(x > 0 \vee \neg Q(x)) \wedge \forall x(\neg x > 0 \vee Q(x))$,

(c) $\forall x(x > 0 \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(\neg x > 0 \wedge Q(x)) \wedge \exists x \neg Q(x)$,

(d) $\forall x(x > 0 \vee Q(x)) \wedge \exists x(x > 0 \wedge \neg Q(x)) \wedge \exists x(\neg x > 0 \wedge Q(x))$.

¹W przypadku zdania o charakterze przeczącym, “żadna” oznacza to samo, co “każda”. Np. “żaden chłopiec nie płacze” to tyle, co “Każdy chłopiec nie płacze” (to drugie zdanie jest językowo niepoprawne, choć dla matematyka ściślejse).