Kolokwium 1 - Analiza i Topologia R 2022

Zad. 1 (6) Znajdź wnętrze i brzeg zbioru A w przestrzeni X, jeśli

a) $X = \mathbb{R}^2$ (z metryką maksimum), $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$,

b) $X = \mathbb{R}^2$ (z metryką centrum), $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$,

c) $X = C[0,1]$ (z metryką supremum), $A = \{f \colon f \text{ jest stała na pewnym przedziale}\}$.

Zad. 2 (6) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $x, y \in X$, $x \neq y$. Zbiór

$$\{z \in X \colon d(x, z) = d(y, z)\}$$

nazwiemy symetralną punktów x i y.

a) Pokaż, że symetralna jest zbiorem domkniętym.

b) Podaj przykład przestrzeni, w której symetralne mają niepuste wnętrza.

Zad. 3 (6) Opisz ciągłą surjekcję $f\colon X \to Y$ i ciągłą surjekcję $g\colon Y \to X$. Czy X i Y są homeomorficzne?

a) $X = [0,1)$ z domyślną metryką, $Y = (0,2)$ z metryką euklidesową,

b) X - okrąg, Y - odcinek domknięty,

c) $X = \mathbb{N}$ z metryką euklidesową, $Y = \mathbb{Q}$ z metryką euklidesową.

Zad. 4 (3) Podaj przykład przestrzeni ośrodkowej, zupełnej, która nie jest ani zwarta ani łukowo spójna. Podaj króciutkie uzasadnienia, że Twoja przestrzeń ma pożądane własności.

Zad. 5 (3) Udowodnij, że jeśli przestrzeń X jest zwarta, to dla każdego $x \in X$ zbiór $\{d(x, y) \colon y \in X\}$ jest ograniczony. [Uwaga, nie posługuj się twierdzeniem z wykładu, bo właśnie masz je udowodnić.]