Kolokwium 2 - Analiza i Topologia R 2023

Zad. 1 (6) Adam M. i Kamil S. wykonują po jednym skoku narciarskim. Długości skoków mierzy się w jednostce „długość skoczni” (a więc należą do przedziału $[0, 1]$). Miara związana ze skokami Kamila dana jest wzorem

$$\mu(A) = \int_A 12(x - 1/2)^2 \, d\lambda,$$

natomiast miara związana ze skokami Adama dana jest wzorem:

$$\nu(A) = \int_A 2x \, d\lambda.$$

Oblicz prawdopodobieństwo, że skoki Adama i Kamila będą **sobie** bliższe niż pół skoczni.

Zad. 2 (3) Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową i niech $B \in \Sigma$. Pokaż, że funkcja dana wzorem

$$\nu(A) = \mu(A \cap B)$$

jest miarą na Σ. Czy ν jest absolutnie ciągła względem μ? Podaj funkcję $f\colon X \to \mathbb{R}$ taką, że

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

lub uzasadnij, że jej nie ma.

Zad. 3 (3) Niech $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gdy } x \in \{2, 3/2, 4/3, 5/4, \dots\}, \\ 2x/(1 + x^2), & \text{w pozostałych wypadkach.} \end{cases}$$

Oblicz $\int_{[1,2]} f \, d\lambda$ i $\int_{[1,2]} f \, d\delta_{3/2}$.

Zad. 4 (2) Podaj definicję miary Lebesgue'a.

Zad. 5 (3) Wykaż, że funkcja $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = [x]$$

jest borelowska (tutaj $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x).

Zad. 6 (3) Sprawdź, czy rodzina zbiorów borelowskich nie jest przypadkiem generowana przez rodzinę zbiorów

$$\{\langle q, n\rangle \colon q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Zad. 7 (4) O malejącym ciągu (a_n) liczb rzeczywistych nieujemnych wiemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty.$$

Pokaż, że

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{n} = 0.$$