Analiza i Topologia R Lista 3

Zad. 1 Pokaż, że $\mathbb{R}$ jest homeomorficzny z przestrzenią $\{f \in C[0,1] \colon f \text{ jest stała}\}$ z metryką supremum. Czy w $C[0,1]$ znajdziemy podprzestrzeń homeomorficzną z $\mathbb{R}^2$?

Zad. 2 Przekonaj się, że jeżeli $h \colon X \to Y$ jest homeomorfizmem i $A \subseteq X$, to $h_{|A}$ (czyli obcięcie h do zbioru A) jest homeomorfizmem między A a $h[A]$. Wywnioskuj stąd, że jeśli x jest punktem rozspajania w X, to $h(x)$ jest punktem rozspajania w Y.

Zad. 3 Zbadaj, które litery alfabetu są ze sobą homeomorficzne. (Rozważaj możliwe proste kroje i skoncentruj się na trudniejszych przypadkach.)

Zad. 4 Czy istnieje funkcja ciągła z okręgu na odcinek domknięty? A z odcinka domkniętego na okrąg?

Zad. 5 Czy X jest homeomorficzna z Y, jeżeli:

a) X jest okręgiem bez punktu, Y jest prostą,

b) X jest sferą, a Y płaszczyzną,

c) X jest okręgiem, a Y odcinkiem domkniętym,

d) X jest płaszczyzną z metryką centrum, a Y jest płaszczyzną z metryką dyskretną,

e) X jest płaszczyzną z metryką dyskretną, a Y jest prostą z metryką dyskretną?

Zad. 6 Uzasadnij, że $[0,1]$ nie jest sumą rozłączną dwóch zbiorów otwartych niepustych (chodzi o zbiory otwarte w $[0,1]$). Wskazówka: załóżmy, że A i B są takimi otwartymi zbiorami i że $0 \in A$. Rozważmy $c = \inf B$. Czy $c \in A$ czy $c \in B$?

Zad. 7 Użyj powyższego zadania, żeby pokazać, że jeśli przestrzeń X jest łukowo spójna, to nie da się jej przedstawić jako sumy rozłącznej dwóch zbiorów otwartych niepustych, a co za tym idzie nie istnieje w niej nietrywialny zbiór otwarto-domknięty.