Analiza i Topologia R **Lista 4** 22 XI 2021

Zad. 1 Udowodnij, że jeśli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to sam jest zbieżny. Wywnioskuj, że przestrzenie zwarte są zupełne.

Zad. 2 Udowodnij, że każdy ciąg zbieżny jest Cauchy'ego.

Zad. 3 Pokaż, że teza twierdzenia Baire'a jest prawdziwa również dla przestrzeni metryzowalnych w sposób zupełny.

Zad. 4 Udowodnij, że w przestrzeni zupełnej przekrój przeliczalnie wielu gęstych zbiorów otwartych jest gęsty. (Wskazówka: użyj twierdzenia Baire'a.)

Zad. 5 Podaj przykład ciągu (x_n) takiego, że

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N \; d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon,$$

ale który nie jest Cauchy'ego. (Wskazówka: rozważ szereg $\sum 1/n$).

Zad. 6 Udowodnij, że $C[0,1]$ jest przestrzenią ośrodkową. W dowodzie wykorzystaj (bez dowodu) twierdzenie Weierstrassa mówiące, że zbiór wielomianów jest gęsty w $C[0,1]$.

Zad. 7 Podaj przykład przestrzeni niezwartej, zupełnej, która nie jest ośrodkowa. Upewnij się, że potrafisz podawać przykłady dla innych układów własności (lub, że potrafisz uzasadnić, że takie przykłady nie istnieją).

Zad. 8 Pokaż, że przestrzeń

$$\ell_1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon \sum_n |x(n)| < \infty\}.$$

z normą $\|\cdot\|_1$ jest zupełna.