

Zad. 1 Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli $\mathcal{A} \subseteq \text{Bor}$ jest taka, że $\sigma(\mathcal{A}) = \text{Bor}$, to następujące warunki są równoważne:

- f jest borelowska,
- $f^{-1}[A]$ jest borelowski dla każdego $A \in \mathcal{A}$.

Wywnioskuj, że borelowskość funkcji można badać sprawdzając przeciwobrazy jedynie zbiorów otwartych / przedziałów / półprostych.

Zad. 2 Pokaż, że następujące funkcje są borelowskie. (Uwaga: żeby sprawdzić, że dany przeciwobraz jest borelowski, niekoniecznie trzeba go znaleźć).

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x > 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \\ -1, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

$$g(x) = \text{sgn}(\sin(x))$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq 0, \\ \sin(\frac{1}{x}), & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} x^2 - e^x & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ \log(|x| + 1)^4 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zad. 3 Załóżmy, że $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami prostymi.

- Pokaż, że istnieje N , zbiory parami rozłączne $(A_n)_{n < N}$ i liczby rzeczywiste $(a_n)_{n < N}$ takie, że

$$f(x) = \sum_{n < N} a_n \chi_{A_n}.$$

- Pokaż, że istnieje N , ciąg wstępujący zbiorów $(A_n)_{n < N}$ i liczby rzeczywiste $(a_n)_{n < N}$ takie, że

$$f(x) = \sum_{n < N} a_n \chi_{A_n}.$$

- Pokaż, że istnieje N , ciąg $(A_n)_{n < N}$ oraz ciągi $(a_n)_{n < N}$, $(b_n)_{n < N}$ takie, że

$$f(x) = \sum_{n < N} a_n \chi_{A_n},$$

$$g(x) = \sum_{n < N} b_n \chi_{A_n}.$$

Zad. 4 Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana przez $f(x) = \inf_n f_n(x)$, gdzie (f_n) jest pewnym ciągiem funkcji borelowskich. Pokaż, że f jest borelowska.

Zad. 5 Załóżmy, że $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są borelowskie. Pokaż, że funkcje $\max(f, g)$, $|f|$, $f + g$ też są borelowskie.