

Zad. 1 Oblicz całkę $\int_{[0,1]} g \, d\lambda$, gdzie

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \sin(x^2) & \text{dla } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zad. 2 Pokaż, że jeżeli μ i ν są miarami określonymi na tym samym σ -ciele, to funkcja $\mu + \nu$ również jest miarą. Podobnie, jeśli (μ_n) jest ciągiem miar określonych na jednym σ -ciele, to $\sum_n a_n \mu_n$ jest miarą dla każdego ciągu (a_n) liczb rzeczywistych.

Zad. 3 Udowodnij, że

$$\int f \, d(\mu + \nu) = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu.$$

Zad. 4 Udowodnij tzw. nierówność Czebyszewa, tzn.

$$\int_X f \, d\mu \geq \varepsilon \cdot \mu(\{x \in X : f(x) \geq \varepsilon\}).$$

Tutaj (X, Σ, μ) jest przestrzenią miarową, f jest funkcją borelowską *nieujemną*, a $\varepsilon > 0$.

Zad. 5 Rozważmy $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Niech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągiem. Pokaż, że

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Zad. 6 Rozważmy następującą grę: z przedziału $[0, 1]$ losujemy liczbę, a za wylosowanie liczby x otrzymamy $12x^2 - 5$ złotych. (Dla przykładu: za wylosowanie 0 musimy zapłacić 5 złotych, a za wylosowanie 1 otrzymamy 7 złotych.) Czy warto grać w tę grę (pomijając walor poznawczy związany z możliwością otrzymania niewymiernie wielu złotych)? Wskazówka: użyj wartości oczekiwanej.

Zad. 7 Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{n \sin(x/n)}{x(x^2 + 1)} \, dx.$$

Wskazówka: zbadaj granicę punktową ciągu pod całką. Użyj któregoś z twierdzeń granicznych.

Zad. 8 Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n^2 x + 2}{n^2 x + n + 3} \, dx.$$

Zad. 9 Niech ν będzie miarą określoną na rodzinie zbiorów borelowskich zdefiniowaną przez

$$\nu(A) = \int_A x^2 d\lambda,$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a. Oblicz

$$\int_{[0,1]} \sin x d\nu.$$

Zad. 10 Załóżmy, że μ i ν są miara określonymi na tej samej σ -algebrze i że $\nu \ll \mu$ oraz $\mu \ll \nu$. Znajdź związek między $\frac{d\mu}{d\nu}$ a $\frac{d\nu}{d\mu}$.