Analiza i Topologia R Lista 8 26 I 2023

Zad. 1 Oblicz miarę $\lambda \otimes \lambda(E)$, gdzie

a) $E = [0,1] \times \{0,1\}$,

b) $E = \{\langle x, y\rangle \colon x - y \in \mathbb{Q}\}$.

Zad. 2 Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda \otimes \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Oblicz miarę $\lambda \otimes \mu(A)$, gdzie

a) $A = [0,1] \times \{0,1\}$,

b) $A = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \colon n \leq m\}$.

Zad. 3 Załóżmy, że dla zbiorów borelowskich A, $B \subseteq [0,1]^2$ zachodzi:

$$\forall x \ \lambda(A_x) = \lambda(B_x).$$

Wykaż, że w takim razie $\lambda_2(A) = \lambda_2(B)$. Pokaż, że ta równość byłaby spełniona również, gdy $\lambda(A_x) = \lambda(B_x)$ prawie wszędzie.

Zad. 4 Dwie osoby losują liczby z przedziału $[0,1]$. Rozkład prawdopodobieństwa związany z losowaniem pierwszej osoby jest dany przez

$$\mu_1(A) = \int_A 3x^2 \, d\lambda,$$

a drugiej przez

$$\mu_2(A) = \int_A 2 - 2x \, d\lambda.$$

(Tzn., że prawdopodobieństwo wylosowania przez i-tą osobę liczby ze zbioru A wynosi $\mu_i(A)$.) Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba wylosowana przez pierwszą osobę będzie dwa razy mniejsza niż przez drugą?

Zad. 5 Rozważmy przestrzeń probabilityczną $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}, \mu)$

- Pokaż, że dystrybuanta F_μ miary μ jest prawostronnie ciągła (było na wykładzie, ale nie zaszkodzi sobie powtórzyć).

- Pokaż, że dystrybuanta F_μ miary μ nie jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $x \in X$ taki, że $\mu(\{x\}) > 0$.

Zad. 6 Rozważmy przestrzeń $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \Sigma, \mu)$, gdzie Σ i μ to σ-algebra i miara produktowa podane na wykładzie. Oblicz $\mu(A)$, jeśli

- A jest zbiorem tych ciągów $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których jedynka pojawiła się nieskończenie wiele razy,
- A jest zbiorem tych ciągów $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których sekwencja $(1,0,1,1)$ pojawia się przynajmniej raz,
- A jest zbiorem tych ciągów $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których sekwencja $(1,0,1,1)$ pojawia się dokładnie raz.

Zad. 7 Oblicz

$$\int \cos x \, d\mu,$$

gdzie μ jest miarą o dystrybuancie $F(x) = \text{arctg} x + \pi/2$.